УДК 536.24 DOI: 10.18324/2077-5415-2022-1-72-77

Нестационарная теплопроводность твердых тел на начальной стадии

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], Р.В. Казаков[1c], А.А. Федяев[2d], В.Н. Федяева[3e]

[1] Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, пер. Институтский, 5, Санкт-Петербург, Россия
[3] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a,b] zlobinsfu@mail.ru, [c] roman.kazakov@list.ru, [d, e] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-7861-0253, [d] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757,
[e] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Статья поступила 01.02.2022, принята 18.02.2022

В настоящее время в связи с интенсификацией промышленных процессов, наметилась устойчивая тенденция к сокращению длительности тепловых технологических процессов. Режим работы оборудования, в котором протекают эти процессы, характеризуется большими градиентами и опасными тепловыми напряжениями. Поэтому температурные режимы различных промышленных изделий и оборудования должны подвергаться тщательному исследованию, особенно в начальной стадии нагрева. Однако проведение такого анализа во многих случаях оказывается довольно трудоемкой задачей, так как большинство традиционных методов исследования в форме бесконечных рядов малоэффективны. В теории теплопроводности принято делить тепловые режимы на начальную, неупорядоченную стадию и стадию регулярного режима. Основные трудности расчетов возникают именно в начальной стадии нагрева либо охлаждения. В статье изложены некоторые методы расчета температурных полей для тел классической формы, пластины и шара, в начальной стадии нагрева (охлаждения) при значениях числа Фурье, близких к нулю. Эффективное совершенствование и оптимизация тепловых процессов, протекающих в промышленных изделиях и установках, возможны только при условии достаточно простого и в то же время точного их математического описания. В статье получены простые и эффективные выражения для определения собственных чисел характеристических уравнений. Данные выражения обладают высокой точностью и позволяют определять все необходимые собственные числа, не прибегая к решению трансцендентных уравнений.

Ключевые слова: интенсификация процессов нагрева; начальная стадия нагрева; температурное поле; методы расчета; регулярный режим; аналитическое решение; собственные функции; собственные числа; математическое описание.

Unsteady thermal conductivity of solid bodies at the initial stage

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], R.V. Kazakov[1c], A.A. Fedyaev[2d], V.N. Fedyaeva[3e]

[1] Siberian federal University; 79, Svobodny Pros., Krasnoyarsk, Russia
[2] St. Petersburg State Forest Technical University under name of S.M. Kirov; 5, Institutsky Per., St. Petersburg, Russia
[3] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a,b] zlobinsfu@mail.ru, [c] roman.kazakov@list.ru, [d, e] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-7861-0253, [d] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757,
[e] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Received 01.02.2022, accepted 18.02.2022

Currently, due to the intensification of industrial processes, there is a steady trend towards reducing the duration of thermal technological processes. The operating mode of the equipment in which these processes occur is characterized by large gradients and dangerous thermal stresses. Therefore, the temperature conditions of various industrial products and equipment should be thoroughly investigated, especially in the initial stage of heating. However, carrying out such an analysis in many cases turns out to be a rather time-consuming task, since most traditional research methods, in the form of infinite series, are ineffective. In the theory of thermal conductivity, it is customary to divide thermal regimes into the initial disordered stage and the stage of the regular regime. The main difficulties of calculations arise precisely in the initial stage of heating or cooling. The article describes some methods for calculating temperature fields for bodies of classical shape, plate and ball, in the initial stage of heating (cooling) at values of the Fourier number close to zero. Effective improvement and optimization of thermal processes occurring in industrial products and installations are possible only under the condition of a fairly simple, at the same time accurate mathematical description of them. In the article, simple and effective expressions for determining the eigenvalues of characteristic equations are obtained. These expressions are highly accurate and make it possible to determine all the necessary eigenvalues without resorting to solving transcendental equations.

Keywords: intensification of heating processes; initial heating stag; temperature field; calculation methods; regular mode; analytical solution; eigenfunctions; eigenvalues; mathematical description.

Введение. В теории теплопроводности твердых тел принято делить процесс прогрева (или охлаждения) на два основных этапа. Первая стадия обычно называется начальной или инерционной. Вторую, являющуюся продолжением первой, принято называть регулярным режимом. В начальный период нагрева (охлаждения) температурное поле в равной степени зависит как от исходного распределения температур, так и от условий теплообмена на границах тела. С течением времени влияние начальных условий уменьшается, и температурный режим в регулярной стадии определяется в основном условиями теплообмена с внешней средой. В настоящее время для исследования температурного режима используются в основном два подхода, это непосредственное измерение температур в массиве нагреваемого изделия и теоретическое исследование, основанное на построении математических моделей температурного режима. Для этого исследуемый физический процесс должен быть представлен в виде соответствующей математической модели. Анализ явлений на основе математических описаний является в настоящее время одним из наиболее эффективных методов исследования теплофизических процессов. Большинство математических моделей нагрева либо охлаждения различных промышленных изделий основаны на использовании уравнения теплопроводности, дополненного начальными и граничными условиями [1–5]. Для определения температурного поля на начальном этапе и этапе регулярного режима, как правило, применяются несколько различные математические подходы, позволяющие облегчить задачу нахождения распределения температуры по сечению исследуемых тел. Целесообразно описанные в научно-технической литературе методы расчета тепловых полей сконцентрировать для наиболее часто встречающихся теплофизических задач, имеющих одновременно важное практическое значение.

Постановка задачи. Запишем широко применяемую в теоретической области рассматриваемую задачу в безразмерной форме как наиболее целесообразную [6–8]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} + \frac{\Gamma - 1}{\psi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}, \qquad (1)$$

$$0 \le \mathrm{Fo} < \infty; \quad 0 \le \psi \le 1,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0 \text{ при } \psi = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = -\mathrm{Bi}\,\vartheta \text{ при } \psi = 1, \qquad (3)$$

$$0 < \mathrm{Bi} < \infty$$

$$\vartheta(\psi, 0) = 1 \text{ при } \mathrm{Fo} = 0. \qquad (4)$$

Здесь имеется в виду, что для плоского тела фактор формы $\Gamma = 1$, а для сферического тела $\Gamma = 3$. Число Био (Bi) — безразмерный комплекс, характеризующий интенсивность теплообмена на наружной поверхности тела. Для аналитического решения задачи (1)–(4) обычно используется классический метод разделения переменных. Такое решение имеет вид следующего бесконечного ряда [1; 9]:

$$\vartheta(\psi, \mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (5)$$

где собственные функции $K_n(\psi)$ для пластины $\Gamma = 1$ и шара $\Gamma = 3$ соответственно равны [1]:

$$K_n(\psi) = \cos(\mu_n \psi), \qquad (6)$$

$$K_n(\psi) = \frac{\sin(\mu_n \psi)}{\mu_n \psi}, \qquad (7)$$

а коэффициенты ряда A_n имеют вид;

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, \qquad (8)$$

$$A_n = \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}. \qquad (9)$$

Для применения указанных формул требуется знать величины собственных значений μ_n. Нахождение μ_n осуществляется на основе использования следующих характеристических уравнений — для пластины $\Gamma = 1$:

$$\mathrm{ctg}\,\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}} \qquad (10)$$

и для сферического тела $\Gamma = 3$:

$$\mathrm{tg}\,\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi} - 1}. \qquad (11)$$

Использование решений в форме (5) для начальной стадии процесса, т. е. при малых и весьма малых величинах Fo, оказывается затруднительным, так как приходится учитывать большое количество членов в формуле (5). Это объясняется тем, что ряд (5) при малых значениях числа Fo оказывается медленно сходящимся [10; 11]. Кроме того, для получения решения в виде ряда (5) требуется определение собственных чисел μ_n и собственных функций $K_n(\psi)$ для каждого слагаемого этого ряда. При умеренных величинах Fo можно ограничиться приемлемым числом первых членов этого ряда. Достаточно эффективным методом получения аналитического решения задачи (1)–(4) является применение методов, улучшающих сходимость данных рядов. Один из таких методов предложен авторами в работе [12].

Известно, что род граничных условий существенно влияет на математическую форму аналитического решения. Представляется целесообразным всесторонне изучить тепловые задачи с граничными условиями 2-го и 3-го рода. Граничные условия 1-го рода методически правильнее считать частным случаем условий 3-го рода.

Граничные условия 2-го рода. Рассмотрим процесс нагрева одномерного тела с неравномерным начальным полем температуры от внешнего источника, тепловой поток которого в общем случае зависит от времени. Тогда строгое решение будет иметь вид:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \Gamma\int_0^1 \psi^{\Gamma-1}\vartheta(\psi)d\psi + \Gamma\int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)d\eta +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} K_n(\psi)\left[A_n\int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)\exp\mu_n^2\eta d\eta +\right.$$
$$\left.+B_n\int_0^1 \psi^{\Gamma-1}\vartheta(\psi)K_n(\psi)d\psi\right]\exp-\mu_n^2\mathrm{Fo}\,. \quad (12)$$

Здесь собственные функции $K_n(\psi)$ имеют вид:

Пластина $\Gamma=1$, $K_n(\psi)=\cos\mu_n\psi$

Шар $\Gamma=3$, $K_n(\psi)=\dfrac{\sin\mu_n\psi}{\mu_n\psi}$.

Коэффициенты A_n и B_n соответственно равны:

$$\Gamma=1,\ A_n=2(-1)^n,\ B_n=2,$$
$$\Gamma=3,\ A_n=\frac{2}{\cos\mu_n},\ B_n=\frac{2}{\mu_n\cos^2\mu_n}.$$

В том случае, когда $T(\psi)=T_0=\mathrm{const}$ и $Q(\mathrm{Fo})=Q=\mathrm{const}$, с помощью операционного метода можно получить соотношения для определения температурного поля в начальный период нагрева:

Неограниченная пластина $\Gamma=1$:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \vartheta_0 + 2Q\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(\mathrm{ierfc}\,\frac{1-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \mathrm{ierfc}\,\frac{1+\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right) \quad (13)$$

Шар $\Gamma=3$:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \vartheta_0 + \frac{Q}{\psi}\left[\exp\left(\mathrm{Fo}-\frac{1-\psi}{\psi}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\mathrm{erfc}\left(\frac{1-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}-\sqrt{\mathrm{Fo}}\right) - \mathrm{erfc}\,\frac{1-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right]. \quad (14)$$

При малых значениях числа Fo эти формулы обладают высокой точностью.

Граничное условие 3-го рода. Строгое решение задачи нагрева тела конвективным потоком имеет вид:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\mu_n^2\int_0^{\mathrm{Fo}} Q_c(\eta)\exp\mu_n^2\eta d\eta +\right.$$
$$\left.+B_n\int_0^1 \psi^{\Gamma-1}\vartheta(\psi)K_n(\psi)d\psi\right]K_n(\psi)\exp-\mu_n^2\mathrm{Fo}\cdot \quad (15)$$

Собственные функции $K_n(\psi)$ имеют тот же вид, что и в предыдущем случае. Характеристические числа μ_n определяют из решения трансцендентных уравнений.

Коэффициенты A_n и B_n в данном случае соответственно равны:

$$\Gamma=1,\ A_n=\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n},\ B_n=\frac{\mu_n}{\sin\mu_n},$$
$$\Gamma=3,\ A_n=\frac{2(\sin\mu_n-\mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n},\ B_n=\frac{\mu_n^2(1-\mathrm{Bi})}{\mathrm{Bi}\cos\mu_n}.$$

Путем интегрирования по частям преобразуем выражение (15) к виду:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \theta_c(\mathrm{Fo}) - \theta_c'(\mathrm{Fo})S(\psi) - \left[\theta_c(0)-\vartheta(1)-\frac{\vartheta'(1)}{\mathrm{Bi}}\right]\times$$
$$\times\left[1-\vartheta^*(\psi,\mathrm{Fo})\right]+$$
$$+\left\{\theta_c'(\mathrm{Fo})-(\Gamma-1)\frac{\mathrm{Bi}-1}{\mathrm{Bi}}\vartheta'(1)-\left(1+\frac{\Gamma-1}{\mathrm{Bi}}\right)\vartheta''(1)-\frac{\vartheta'''(1)}{\mathrm{Bi}}+\right.$$
$$+\int_0^{\mathrm{Fo}}\theta_c''(\eta)\exp\mu_1^2\eta d\eta +$$
$$+\frac{B_1}{\mu_1^2}\int_0^1\left[(\Gamma-1)(\Gamma-3)\left(\frac{\vartheta''}{\psi}-\frac{\vartheta'}{\psi^2}\right)+(\Gamma-1)\psi^{\Gamma-1}\vartheta^{IV}\right]\times$$
$$\left.\times K_1(\psi)d\psi\right\}\times\frac{A_1}{\mu_1^2}K_1(\psi)\exp-\mu_1^2\mathrm{Fo}\,. \quad (16)$$

Данным соотношением удобно пользоваться при определении температурного поля в начальный период прогрева, так как оно не содержит бесконечные ряды.

В работе [13] предложен математический подход для определения первого корня μ_1 уравнения (10), являющегося для изучения регулярной стадии процесса наиболее важным. Для нахождения корней μ_n более высокого порядка этого уравнения можно рекомендовать следующее сравнительно несложное математическое выражение:

$$\mu_n = (n-1)\pi + \frac{3(n-1)\pi}{2(3+\mathrm{Bi})}\times\left[\sqrt{1+\frac{4\mathrm{Bi}(3+\mathrm{Bi})}{3(n-1)^2\pi^2}}-1\right]. \quad (17)$$

Здесь $n\ge 2$ и число $\mathrm{Bi}\le 10$. В этом случае точность выражения весьма высокая. Например, даже при $\mathrm{Bi}=10$ расчет по формуле (17) дает результаты $\mu_2=4{,}3409$; $\mu_6=16{,}2604$ и соответствующие табличные значения [1] равны $\mu_2=4{,}3058$ и $\mu_6=16{,}2594$. При этом следует отметить, что с увеличением номера корня n точность резко возрастает. При слишком больших величинах Bi ($\mathrm{Bi}>10$) может быть применена несколько иная формула для нахождения μ_n ($n\ge 2$):

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi - \frac{3(\mathrm{Bi}+1)}{2(n-1)\pi}\times\left[\sqrt{1+\frac{4(n-1)^2\pi^2}{3(\mathrm{Bi}+1)^2}}-1\right]. \quad (18)$$

Так, например, определение μ_n ($n=2$ и $n=6$) по выражению (13) для $\mathrm{Bi}=50$ дает результаты $\mu_2=4{,}6509$; $\mu_6=16{,}9800$. Табличные значения этих же корней соответственно будут [1] $\mu_2=4{,}6202$;

$\mu_6 = 16{,}9519$. Аналогичные приближенные решения для определения μ_n для шарообразного тела получены авторами в работе [13–15].

Одновременно важной задачей в теории нестационарной теплопроводности твердых тел является детальное изучение процессов переноса в самой начальной стадии. Одной из особенностей этой стадии является то, что она характеризуется максимально большими градиентами температуры и, следовательно, в объеме тела возникают наибольшие опасные тепловые напряжения. В настоящее время в распоряжении теплофизиков имеются весьма приемлемые аналитические решения для изучения начального периода процессов теплопроводности, разработанные академиком А.В. Лыковым на основе операционного метода Лапласа [1]. К сожалению, рекомендуемые расчетные зависимости в монографии [1] не всегда представлены в компактном, концентрированном, обобщенном виде. В основе полученных в [1] математических решений исключительно только для первоначального этапа теплопереноса используются специальные функции, а конкретно, интеграл ошибок [2]. Одним из достоинств этих функций является, в частности то, что они достаточно подробно протабулированы [16; 17]. Рекомендуемые расчетные зависимости в [1] могут быть записаны следующим образом. Так для неограниченной пластины при симметричном отводе (или подводе) тепла может быть применена для нахождения температурного поля вместо решения (5) следующая формула:

$$1-\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \mathrm{erfc}\,\frac{1-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \exp\left[\mathrm{Bi}(1-\psi)+\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)+$$
$$+\,\mathrm{erfc}\,\frac{1+\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \exp\left[\mathrm{Bi}(1+\psi)+\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1+\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right). \qquad (19)$$

Соотношение (19) является приближенным решением, пригодным для малых значений Fo. При изучении нестационарных температурных полей, формирующихся внутри исследуемых конструкций, наибольший практический интерес представляют температуры поверхности тела и его центра. Из (19) следует, что безразмерная температура поверхности пластины ($\psi = 1$) может быть рассчитана по выражению:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \pm\exp\left[\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right]\cdot\mathrm{erfc}\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\mp$$
$$\pm\,\mathrm{erfc}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fo}}} \pm \exp\left[2\,\mathrm{Bi}+\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right). \qquad (20)$$

При слишком малых значениях Fo выражение (20) может быть существенно упрощено:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \exp\left[\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right]\cdot\mathrm{erfc}\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right). \qquad (21)$$

При больших значениях комплекса $\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}$ нужно вместо (16) использовать соотношение [1]:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}}-\frac{1}{2\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)^2}\right). \qquad (22)$$

Для геометрического центра пластины ($\psi = 0$) согласно решению (22) будет справедливо выражение:

$$\vartheta(0,\mathrm{Fo}) = 1-2\left[\mathrm{erfc}\,\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\mathrm{Bi}+\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\right], \qquad (23)$$

расчет по которому при малых Fo, очевидно, будет проще, чем по классическому соотношению (5).

Сферическое тело, решение в виде ряда [1]:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(\mu_n\psi)}{\mu_n\psi}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \qquad (24)$$

где собственные числа μ_n являются корнями характеристического уравнения:

$$\mathrm{tg}\,\mu = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}-1}, \qquad (25)$$

а коэффициенты ряда A_n рассчитываются по выражению:

$$A_n = \frac{2(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n}. \qquad (26)$$

В работе [13] приведен подробный анализ предложенных эффективных аналитических методов расчета корней μ_n уравнения (25) при любых величинах параметра Bi и порядкового номера n.

Для центра шара ($\psi = 0$) формула (24) принимает вид бесконечной суммы:

$$\vartheta(0,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right). \qquad (27)$$

У А.В. Лыкова [1] вместо принятого нами $\vartheta(\psi,\mathrm{Fo})$ используется зависимость:

$$\theta(0,\mathrm{Fo}) = 1-\vartheta(0,\mathrm{Fo}). \qquad (28)$$

При расчетах по формуле (27) для шара, даже при сравнительно больших числах Fo, приходится учитывать достаточно большое число первых членов этого ряда. Это объясняется тем, что знакопеременные коэффициенты A_n по абсолютной величине затухают с ростом порядкового номера n не слишком быстро. Становится очевидным, что при малых значениях числа Fo целесообразно на практике использовать решения другого вида, полученные на основе операционного метода Лапласа [1]. Эти решения, как известно, имеют вид:

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) \approx 1 \pm \frac{\mathrm{Bi}}{\psi(\mathrm{Bi}-1)}\left\{\mathrm{erfc}\,\frac{1\mp\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} - \exp\left[(\mathrm{Bi}-1)^2\mathrm{Fo}+\right.\right.$$

$$+\left(\mathrm{Bi}-1\right)\left(1\mp\psi\right)\right]\cdot\mathrm{erfc}\left(\frac{1\mp\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\left(\mathrm{Bi}-1\right)\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\Bigg\}\cdot \quad (29)$$

В случае $\mathrm{Bi}=1$ решение (29) можно представить в форме:

$$\vartheta(0,\mathrm{Fo})=1-\frac{2}{\psi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$$
$$\times\left\{\mathrm{ierfc}\,\frac{(2n-1)-\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}-\mathrm{ierfc}\,\frac{(2n-1)+\psi}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right\}, \quad (30)$$

где значения специальных функций $\mathrm{ierfc}\,(z)$ содержатся в математических справочниках [17–19].

Из выражения (30) вытекает, что в частном случае, а именно $\mathrm{Bi}=1$, оно существенно упрощается:

$$\vartheta(0,\mathrm{Fo})=1-2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)\cdot \quad (31)$$

Естественно, что вычисление температуры в середине сферического тела при небольших Fo по классической формуле (22) с необходимой точностью оказывается намного сложнее, чем по формулам (30) и (26).

Заключение

В статье рассмотрены проблемы решения задач нагрева (охлаждения) тел классической формы — пластины и шара в начальный период нагрева, когда число Фурье близко к нулю. Проведен анализ формул, позволяющих получить требуемое решение, не прибегая к утомительной процедуре суммирования бесконечных рядов. Анализ такого решения приведен в работе [20]. При суммировании рядов, представляющих собой решение задач теплопроводности пластины и шара, приходится на каждом шаге решать трансцендентные уравнения и определять собственные значения и собственные функции. Данная процедура представляет собой отдельную непростую задачу. Приведенные в статье достаточно несложные алгебраические формулы позволяют определять собственные числа характеристических уравнений с высокой точностью, что делает доступным аналитическое решение достаточно широкого класса задач теплопроводности.

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. школа, 1978. 328 с.
3. Carslaw H.S., Jaeger, J.C. Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1986. 520 p.
4. Baehr H.D., Stephan K. Heat and Mass Transfer. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. 710 p.
5. Eckert E.R.G., Drake R.M. Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, 1959. 530 p.
6. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: Изд-во Красноярского политехнического ин-та, 1974. 144 с.
7. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И. Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации. Красноярск: СФУ, 2016. С. 167.
8. Федяев А.А., Видин Ю.В., Злобин В.С. Нелинейные процессы переноса тепла в многослойных конструкциях. Братск: Изд-во БрГУ, 2020. С. 217.
9. Chu H.S., Chen C.K., Weng C. Applications of Fourier series technique to transient heat transfer problems. Chem. Eng. Commun. 1982. 16. P. 215-225.
10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970. 712 с.
11. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. 2007 by Taylor & Francis Group, LLC.
12. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Приближенный метод определения суммы некоторых бесконечных рядов // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 1 (49). С. 55-58.
13. Видин Ю.В., Злобин В.С. Определение собственных значений в задаче нестационарной теплопроводности неоднородного плоского тела // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 6. С. 76-80.
14. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. К расчету нестационарной теплопроводности двухслойной плоской системы // Системы. Методы. Технологии. 2021. № 3 (51). С. 53-58.
15. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 57-60.
16. Berlyand O.S., Gavrilovo R.I., Prudnikov A.P. Tables of integral error functions and Hermite polynomials. Oxford: Pergamon Press, 1962. 163 p.
17. Абрамовиц М., Стиган. И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 890 с.
18. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
19. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 450 с.
20. Pöschl. Berechnung der Oberflächentemperaturen geometrisch einfacher Körper bei Abkühlung oder Erwärmung der Isolierstoffe.

References

1. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1967. 600 p.
2. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of unsteady thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1978. 328 p.
3. Carslaw H.S., Jaeger, J.C. Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1986. 520 p.
4. Baehr H.D., Stephan K. Heat and Mass Transfer. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. 710 p.
5. Eckert E.R.G., Drake R.M. Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, 1959. 530 p.
6. Vidin YU.V. Engineering methods for calculating heat transfer processes. Krasnoyarsk: Izd-vo Krasnoyarskogo politekhnicheskogo in-ta, 1974. 144 p.
7. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Ivanov D.I. Unsteady heat transfer in inhomogeneous structures of curved configuration. Krasnoyarsk: SFU, 2016. P. 167.
8. Fedyaev A.A., Vidin YU.V., Zlobin V.S. Nonlinear heat transfer processes in multilayer structures. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2020. P. 217.
9. Chu H.S., Chen C.K., Weng C. Applications of Fourier series technique to transient heat transfer problems. Chem. Eng. Commun. 1982. 16. P. 215-225.
10. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential equations of mathematical physics. M.: Vyssh. shkola, 1970. 712 p.

11. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. 2007 by Taylor & Francis Group, LLC.
12. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Approximate method for determining the sum of some infinite series // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 1 (49). P. 55-58.
13. Vidin YU.V., Zlobin V.S. Determination of eigenvalues in the problem of nonstationary thermal conductivity an inhomogeneous flat body // Izv. RAN. Energetika. 2021. № 6. P. 76-80.
14. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. On the calculation of non-stationary thermal conductivity of a two-layer flat system. 13The system // Systems. Methods. Technologies. 2021. № 3 (51). P. 53-58.
15. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method for calculating a non-stationary temperature field with a variable coefficient of thermal conductivity // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 1 (41). P. 57-60.
16. Berlyand O.S., Gavrilovo R.I., Prudnikov A.P. Tables of integral error functions and Hermite polynomials. Oxford: Pergamon Press, 1962. 163 p.
17. Abramovic M., Stigan I. Handbook of special functions. M.: Nauka, 1979. 890 p.
18. YAnke E., Emde F., Lyosh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.
19. Segal B.I., Semendyaev K.A. Five-digit mathematical tables. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 450 p.
20. Pöschl. Berechnung der Oberflächentemperaturen geometrisch einfacher Körper bei Abkühlung oder Erwärmung der Isolierstoffe.