

## Анализ точности изделий машиностроения для случая параллельно связанных линейных размерных цепей

Л.Ф. Хващевская<sup>а</sup>, Д.А. Журавлев<sup>б</sup>

Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия

<sup>а</sup> xvlf@mail.ru, <sup>б</sup> dio@gmail.com

<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0002-6157-7175>, <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-8017-9255>

Статья поступила 28.01.2022, принята 11.02.2022

*В статье рассмотрен вопрос о решении прямой и обратной задач анализа размерных характеристик сборочных единиц с использованием матриц для случая, когда размерная схема изделия представлена параллельно связанными линейными размерными цепями. Выделены три основные группы размерных схем с взаимосвязанными линейными цепями. К ним отнесены размерные схемы, в которых 1) общими звеньями размерных цепей являются только составляющие звенья, 2) замыкающие звенья одних размерных цепей являются составляющими звеньями других, 3) замыкающие и составляющие звенья одной цепи являются составляющими звеньями другой. Решение прямой задачи проводится с использованием псевдообратной матрицы. Получены расчетные формулы для анализа точности размерных характеристик сборочных единиц методом полной взаимозаменяемости. Проведено сравнение результатов решения прямой задачи анализа, полученных для случая, когда размерная схема изделия состоит из одной линейной размерной цепи при использовании псевдообратной матрицы и способа равных допусков. Получены аналитические условия для решения проблемы идентификации размерной схемы, состоящей из связанных линейных размерных цепей. Разработанный подход к анализу точности размерных характеристик сборочных единиц может быть использован на стадии проектирования и позволит снизить трудозатраты, время на его проведение, а также повысить качество изделий.*

**Ключевые слова:** изделия машиностроения; точность; допуски; размерный анализ; взаимосвязанные размерные цепи; псевдообратная матрица; метод полной взаимозаменяемости; идентифицируемость размерной схемы.

## Analysis of the accuracy of machine-building products for the case of parallel connected linear dimensional chains

L.F. Khvashevskaya<sup>а</sup>, D.A. Zhuravlev<sup>б</sup>

Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

<sup>а</sup> xvlf@mail.ru, <sup>б</sup> dio@gmail.com

<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0002-6157-7175>, <sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-8017-9255>

Received 28.01.2022, accepted 11.02.2022

*The article discusses the issue of solving the direct and inverse problems of analyzing the dimensional characteristics of assembly units using matrices for the case when the dimensional diagram of the product is represented by parallel connected linear dimensional chains. The main three groups of dimensional schemes with interconnected linear chains are identified. They include dimensional schemes, in which: 1) the common links of the dimensional chains are only the constituent links; 2) the closing links of some dimensional chains are constituent links of others; 3) closing and constituent links of one chain are constituent links of another. The direct problem is solved using a pseudoinverse matrix. Calculation formulas are obtained for the analysis of the accuracy of the dimensional characteristics of assembly units by the method of complete interchangeability. The comparison of the results of solving the direct problem of analysis, obtained for the case when the dimensional diagram of the product consists of one linear dimensional chain, using a pseudo-inverse matrix and a method of equal tolerances is carried out. Analytical conditions are obtained for solving the problem of identification of a dimensional scheme, consisting of interconnected linear dimensional chains. The developed approach to the analysis of the accuracy of the dimensional characteristics of assembly units can be used at the design stage and will reduce labor costs, the time spent on it, and also improve the quality of products.*

**Keywords:** mechanical engineering products; accuracy; tolerances; dimensional analysis; interconnected dimensional chains; pseudoinverse matrix; method of complete interchangeability; identifiability of the dimensional scheme.

**Введение.** Создание качественных, технологичных, экономически эффективных новых изделий машиностроения, а также модернизация существующих в сжатые сроки и с минимальными затратами — основные задачи, решение которых обеспечит их конкурентоспособность на рынке.

Точность размерных и геометрических характеристик изделия — один из важнейших показателей его качества. Повышение точности сборочных единиц способствует улучшению показателей безотказности и долговечности механизмов и машин. Так, например, при повышении точности деталей шарикоподшипника и

уменьшении зазоров в нем от 20 до 10 мкм срок его службы увеличивается с 740 до 1 200 ч.

На этапе конструкторско-технологической подготовки производства изделий машиностроения одной из важнейших задач является обеспечение совокупности свойств конструкции, технологического процесса изготовления и организации сборочного производства, обеспечивающих достижение заданных технических требований к собранному изделию и его функционированию.

Ключевым инструментом в решении такого рода задач является размерный анализ. Расчет размерных цепей изделия является обязательным этапом конструирования изделий (машин), а также их производства и эксплуатации, позволяющим правильно назначать номинальные размеры, допуски и предельные отклонения звеньев размерных цепей, провести анализ правильности простановки размеров и отклонений, обосновать последовательность выполнения технологических операций при изготовлении деталей и т. д.

Как известно, размерный анализ предполагает решение двух задач, прямой и обратной.

При решении прямой задачи, исходя из установленных требований к исходным звеньям размерных цепей, входящих в размерную схему (должны быть известны номинальные размеры, допуски, верхние и нижние отклонения исходных звеньев) изделия, определяют допуски и предельные отклонения составляющих звеньев.

Известны несколько способов распределения допуска исходного звена между составляющими звеньями размерной цепи [1]: способ пробных расчетов; способ равных допусков; способ одной степени точности.

Способ равных допусков (метод полной взаимозаменяемости) основан на использовании формулы:

$$T_i = \frac{T_0}{n},$$

где  $T_0$  — допуск исходного звена;  $T_i$  — допуск составляющего звена, ( $i = \overline{1, n}$ );  $n$  — количество составляющих звеньев.

Этот способ используется для предварительного назначения допусков составляющих размеров.

Способ одной степени точности предполагает расчет среднего значения качества составляющих звеньев (метод полной взаимозаменяемости) с использованием коэффициента точности, найденного по формуле:

$$a_c = \frac{T_0}{\sum_{i=1}^p \left( 0,45 \cdot \sqrt[3]{D_i^{cz}} + 0,001 \cdot D_i^{cz} \right)},$$

где  $T_0$  — допуск исходного звена;  $D_i^{cz} = \sqrt{D_i^{\min} \cdot D_i^{\max}}$  — среднее геометрическое интервала размеров  $i$ -го составляющего звена, ( $i = \overline{1, p}$ );  $p$  — число составляющих звеньев.

При решении обратной задачи анализа необходимо по установленным номинальным размерам, допускам и предельным отклонениям составляющих звеньев цепей, входящих в размерную схему изделия, определить номинальный размер, допуск и предельные отклонения замыкающих звеньев.

Наиболее распространенными методами расчета размерных цепей являются метод полной взаимозаменяемости (метод максимума-минимума) и метод неполной взаимозаменяемости (вероятностный метод) [1].

Обзор исследований по проблеме точности размерных и геометрических характеристик изделий машиностроения, представленных большим количеством авторов [3–18], свидетельствует о том, что эта проблема десятилетиями находится в центре внимания. Чаще всего рассматривается случай одной размерной цепи.

**Анализ точности размерных характеристик сборочных единиц для случая взаимосвязанных линейных размерных цепей.** Размерную схему изделия, как правило, образуют несколько размерных цепей, связанных друг с другом общими звеньями. Можно выделить следующие три основные группы размерных схем изделий с взаимосвязанными размерными цепями:

- 1) общими звеньями цепей схемы являются только составляющие звенья;
- 2) замыкающие (исходные) звенья одних размерных цепей являются составляющими звеньями других;
- 3) замыкающие (исходные) и составляющие звенья одних цепей являются составляющими звеньями других цепей схемы.

На рис. 1 приведен пример узла, а на рис. 2 показана размерная схема для него. Она содержит параллельно связанные линейные размерные цепи, относящиеся к первой группе, поскольку цепи  $A$  и  $B$  имеют общее звено  $A_2B_3$ .

Очевидно, что отклонения в размерах общих звеньев взаимосвязанных цепей влияют на величину суммарной погрешности замыкающих звеньев каждой из связанных размерных цепей схемы. Следовательно, точность размеров общих звеньев должна удовлетворять требованиям точности замыкающих звеньев всех взаимосвязанных размерных цепей.

Все выявленные размерные цепи изделия подлежат обязательному расчету, что неизбежно приводит к большому количеству перерасчетов.

Целью данного исследования является разработка подхода к решению задач (прямой и обратной) размерного анализа изделий машиностроения, размерные схемы которых состоят из взаимосвязанных линейных размерных цепей, методом полной взаимозаменяемости с использованием матриц.

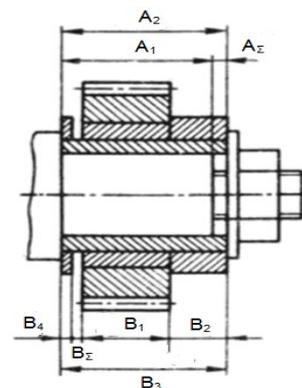


Рис. 1. Сборочная единица и ее размерные цепи

Суть подхода к анализу размерной схемы изделия с взаимосвязанными линейными цепями рассмотрим на примере размерной схемы, представленной на рис. 2.

Предположим, что в соответствии со служебным назначением узла требуется проверить возможность получения при его сборке зазора  $B_{\Sigma}$  в пределах 0,1–0,3 мм (возможность свободного вращения и недопустимость большого осевого смещения) и размера  $A_{\Sigma}$  — в пределах 8,002–8,04 мм, если детали поступают на сборку с отклонениями  $A_1 = 72_{-0,030}^{+0,011}$  мм,  $A_2 = B_3 = 80_{-0,0095}^{+0,0095}$  мм,  $B_1 = 42_{-0,031}^{+0,031}$  мм,  $B_2 = 30_{-0,026}^{+0,026}$  мм,  $B_4 = 8_{-0,218}^{-0,182}$  мм.

В соответствии с техническими требованиями к узлу составим размерную схему, состоящую из параллельно связанных линейных размерных цепей  $A$  и  $B$  (рис. 2). Увеличивающими звеньями являются звенья  $B_1, B_2, B_4, A_1$ , а звенья  $A_2$  и  $B_3$  — уменьшающими. Так как составляющие звенья  $A_2$  и  $B_3$  являются общими для этих цепей, то считаем их как одно звено  $A_2B_3$ .

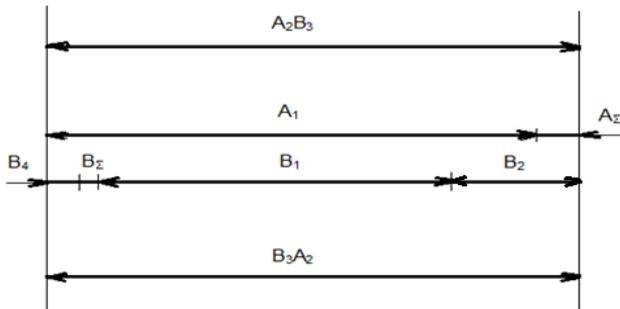


Рис. 2. Размерная схема узла, показанного на рис. 1

Основные уравнения размерной схемы узла имеют вид:

$$\begin{cases} -A_1 + A_2B_3 - A_{\Sigma} = 0, \\ B_1 + B_2 - B_3A_2 + B_4 + B_{\Sigma} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Запишем уравнения (1) в виде, разрешенном относительно размеров замыкающих звеньев цепей  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} A_{\Sigma} = -A_1 + A_2B_3, \\ B_{\Sigma} = B_3A_2 - B_1 - B_2 - B_4. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения для замыкающих и составляющих звеньев размерных цепей  $A$  и  $B$ :

$$A_{\Sigma} = y_1, B_{\Sigma} = y_2, A_1 = x_1, A_2B_3 = A_3B_2 = x_2, B_1 = x_3, B_2 = x_4, B_4 = x_5.$$

Тогда математическая (аналитическая) модель (1) размерной схемы рассматриваемого узла принимает следующий вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - y_1 = 0, \\ -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

или:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3 - x_4 - x_5. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения размерных цепей  $A$  и  $B$  узла, записанные в виде (4), т. е. в виде, когда размеры замыкающих (исходных) звеньев выражены через размеры составляющих звеньев, будем называть приведенными, а модель (4) — приведенной моделью. Аналитическую модель (3) — структурной моделью.

Введем в рассмотрение матрицы:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T.$$

В матричной форме система линейных уравнений (4) имеет вид:

$$Y = Q \cdot X, \quad (5)$$

где  $Y$  — матрица номинальных размеров замыкающих звеньев;  $Q = (q_{ji})$  — матрица передаточных отношений;  $X$  — матрица номинальных размеров составляющих звеньев.

В общем случае матрица  $Y$  имеет размер  $m \times 1$ , матрица  $Q = (q_{ji})$  — матрица размера  $m \times n$ , а матрица  $X$  — размера  $n \times 1$ , где  $m$  — количество замыкающих (исходных) звеньев, а  $n$  — количество составляющих звеньев размерной схемы.

Используя уравнение (5), получим матрицу номинальных размеров замыкающих звеньев размерных цепей  $A$  и  $B$  для рассматриваемого примера:

$$Y = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, номинальное значение размера  $A_{\Sigma}^{номин} = 8$  мм, а номинальный размер зазора  $B_{\Sigma}^{номин} = 0$  мм.

Введем в рассмотрение матрицы предельных отклонений составляющих звеньев:

$$\Delta S_x = (\Delta S(x_1) \ \Delta S(x_2) \ \Delta S(x_3) \dots \Delta S(x_n))^T,$$

$$\Delta I_x = (\Delta I(x_1) \ \Delta I(x_2) \ \Delta I(x_3) \dots \Delta I(x_n))^T,$$

где  $\Delta S(x_i)$  — верхнее предельное отклонение составляющего размера  $x_i$ ;  $\Delta I(x_i)$  — нижнее предельное отклонение размера  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $n$  — количество составляющих звеньев.

Матрицу  $\Delta X_c = (\Delta x_{ci})$  средних отклонений полей допусков составляющих звеньев получим следующим образом:

$$\Delta X_c = \frac{1}{2} \cdot (\Delta S_x + \Delta I_x),$$

где  $\Delta S_x, \Delta I_x$  — матрицы предельных отклонений (верхних и нижних соответственно) составляющих звеньев.

Средние отклонения полей допусков замыкающих звеньев найдем, используя матричное уравнение:

$$\Delta Y_c = Q \cdot \Delta X_c, \quad (6)$$

где  $\Delta Y_c = \begin{pmatrix} \Delta y_{1c} \\ \Delta y_{2c} \end{pmatrix}$  — матрица средних отклонений полей допусков замыкающих звеньев;

$\Delta X_c = (\Delta x_{c1} \Delta x_{c2} \Delta x_{c3} \Delta x_{c4} \Delta x_{c5})^T$  — матрица средних отклонений полей допусков составляющих звеньев.

При расчете допусков замыкающих звеньев размерной схемы сборочной единицы методом полной взаимозаменяемости (наихудшего случая) получаем матрицу допусков в виде:

$$T_Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n |q_{1i}| \cdot T_{X_i} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n |q_{mi}| \cdot T_{X_i} \end{pmatrix} = Q(\text{mod}) \cdot T_X, \quad (7)$$

где  $T_Y = \begin{pmatrix} T_{Y_1} \\ \dots \\ T_{Y_m} \end{pmatrix}$  — матрица допусков замыкающих звеньев;

$T_{X_i}$  — допуски составляющих звеньев размерной схемы;  $Q(\text{mod})$  — матрица, элементами которой являются модули  $|q_{ji}|$  передаточных отношений;

$T_X = (T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_n})^T$  — матрица допусков составляющих звеньев.

В соответствии с формулой (7) для рассматриваемого примера получим следующую матрицу допусков замыкающих звеньев:

$$T_Y = \begin{pmatrix} 0,038 \\ 0,017 \end{pmatrix}.$$

Матрицу верхних предельных отклонений замыкающих звеньев размерной схемы сборочной единицы получим следующим образом:

$$\Delta S_Y = Q \cdot \Delta X_c + \frac{1}{2} \cdot T_Y, \quad (8)$$

а матрицу нижних отклонений — в виде:

$$\Delta I_Y = Q \cdot \Delta X_c - \frac{1}{2} \cdot T_Y. \quad (9)$$

Здесь матрицы  $T_Y$ ,  $\Delta Y_c$  найдены из (6) и (7).

Предельные размеры (максимальные и минимальные) замыкающих звеньев находим из формул:

$$Y^{\max} = Q \cdot X + \Delta S_{\Sigma}, \quad (10)$$

$$Y^{\min} = Q \cdot X + \Delta I_{\Sigma}, \quad (11)$$

где  $X$  — матрица номинальных размеров составляющих звеньев.

Верификацию полученных предельных размеров  $(y_j^{\max})^{\text{расч}}$ ,  $(y_j^{\min})^{\text{расч}}$  замыкающих звеньев проведем, используя следующие соотношения:

$$(y_j^{\max})^{\text{расч}} \leq (y_j^{\max})^{\text{проект}}, \quad (12^1)$$

$$(y_j^{\min})^{\text{расч}} \geq (y_j^{\min})^{\text{проект}}. \quad (12^2)$$

При невыполнении хотя бы одного из соотношений (12<sup>1</sup>), (12<sup>2</sup>) необходима корректировка исходных данных.

Для рассматриваемого примера получаем следующие матрицы предельных размеров:

$$\Delta S_Y = \begin{pmatrix} 0,0400 \\ 0,2845 \end{pmatrix}, \quad \Delta I_Y = \begin{pmatrix} 0,0020 \\ 0,1155 \end{pmatrix}, \quad Y^{\max} = \begin{pmatrix} 8,040 \\ 0,29 \end{pmatrix},$$

$$Y^{\min} = \begin{pmatrix} 8,002 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Сравним расчетные значения предельных размеров замыкающих звеньев с проектными значениями, определенными в условии задачи:

$$(y_1^{\max})^{\text{расч}} = (y_1^{\max})^{\text{проект}} = 8,04 \text{ мм},$$

$$(y_1^{\min})^{\text{расч}} = (y_1^{\min})^{\text{проект}} = 8,002 \text{ мм},$$

$$(y_2^{\max})^{\text{расч}} = 0,29 \text{ мм} < (y_2^{\max})^{\text{проект}} = 0,3 \text{ мм},$$

$$(y_2^{\min})^{\text{расч}} = (y_2^{\min})^{\text{проект}} = 0,1 \text{ мм}.$$

Следовательно, изменения заданных предельных отклонений размеров составляющих звеньев не требуется.

Далее рассмотрим решение прямой задачи размерного анализа для размерной схемы первого типа с использованием псевдообратной матрицы  $Q^+$ .

Поскольку псевдорешение является минимальным по модулю [19; 20] по сравнению с другими решениями, то для отыскания отклонений составляющих звеньев размерной схемы изделия используем формулу:

$$\Delta X = Q^+ \cdot \Delta Y,$$

где  $\Delta X = (\Delta x_i)$  — псевдорешение — матрица размера  $n \times 1$  отклонений размеров составляющих звеньев;  $\Delta Y = (\Delta y_j)$  — матрица размера  $m \times 1$  отклонений размеров исходных звеньев.

Тогда расчетные допуски размеров составляющих звеньев методом наилучшего случая будут получены следующим образом:

$$T_{X_i} = \left| \sum_{j=1}^m p_{ij} \cdot T_{Y_j} \right|, \quad (13)$$

где  $p_{ij}$  — элементы псевдообратной матрицы  $Q^+$ .

Верификацию расчетных допусков составляющих звеньев проведем, используя соотношение:

$$T_{Y_j}^{\text{расч}} \leq T_{Y_j}^{\text{проект}}, \quad (14)$$

где  $T_{Y_j}^{\text{расч}}$  — расчетные допуски замыкающих звеньев, полученные по формуле (7) с учетом формулы (13);  $T_{Y_j}^{\text{проект}}$  — допуски исходных звеньев, назначенные конструктором.

Если хотя бы одно из условий (14) не выполняется, то расчетные допуски на размеры составляющих звеньев не обеспечат выполнение точностных требований к размерным характеристикам сборочной единицы. Следовательно, требуется корректировка.

Расчетные верхнее и нижнее предельные отклонения составляющих звеньев найдем из формул:

$$\Delta S_X^{расч} = \Delta X_c + \frac{1}{2} \cdot T_X^{расч}, \quad (15)$$

$$\Delta I_X^{расч} = \Delta X_c - \frac{1}{2} \cdot T_X^{расч}. \quad (16)$$

Здесь элементы матрицы  $T_X^{расч}$  получены с использованием формулы (13). Матрица средних отклонений полей допусков составляющих звеньев должна быть задана или может быть получена следующим образом:

$$\Delta X_c = Q^+ \cdot \Delta Y_c, \quad (17)$$

где  $Q^+$  — псевдообратная матрица размера  $n \times m$ ;  $\Delta X_c = (\Delta x_{ic})$  — матрица размера  $n \times 1$  средних отклонений  $\Delta x_{ic}$  полей допусков составляющих звеньев;  $\Delta Y_c = (\Delta y_{jc})$  — матрица размера  $m \times 1$  средних отклонений полей допусков исходных звеньев.

Отметим, что средние отклонения полей допусков составляющих звеньев для всей размерной схемы сборочной единицы должны удовлетворять соотношениям, полученным из формулы (6):

$$\sum_{i=1}^n q_{ji} \cdot \Delta x_{ci} = \Delta y_{cj}, \quad (j = \overline{1, m}). \quad (18)$$

При невыполнении хотя бы одного из соотношений (18) необходимо внести корректировки.

Полагаем, что известны номинальные размеры составляющих звеньев. Расчетные предельные размеры (максимальные и минимальные) составляющих звеньев найдем из формул:

$$(X^{max})^{расч} = X + \Delta S_X^{расч}, \quad (19)$$

$$(X^{min})^{расч} = X + \Delta I_X^{расч}, \quad (20)$$

где  $X$  — матрица номинальных размеров составляющих звеньев;  $(X^{max})^{расч}$  — расчетная матрица максимальных размеров составляющих звеньев;  $(X^{min})^{расч}$  — расчетная матрица минимальных размеров составляющих звеньев.

Рассмотрим решение прямой задачи анализа для размерной схемы узла, показанного на рис. 1, с использованием псевдообратной матрицы.

Предположим, что для рассматриваемого узла известны номинальные размеры, предельные отклонения размера  $A$  и зазора  $B$ :  $A_0 = 8_{+0,04}^{+0,04}$  мм,  $B_0 = 0_{0,1}^{0,3}$  мм. Известны также номинальные значения размеров составляющих звеньев  $A_1 = 72$  мм,  $A_2 = B_3 = 80$  мм,  $B_1 = 42$  мм,  $B_2 = 30$  мм,  $B_4 = 8$  мм. Требуется определить допуски, предельные отклонения и предельные размеры составляющих звеньев размерных цепей  $A$  и  $B$  узла (рис. 1) методом наихудшего случая с использованием псевдообратной матрицы.

Рассчитаем псевдообратную матрицу:

$$Q^+ = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (15), получим матрицу расчетных допусков составляющих звеньев:

$$T_X^{расч} = (0,007 \ 0,045 \ 0,052 \ 0,052 \ 0,052)^T.$$

Следовательно, расчетные допуски на составляющие звенья размерных цепей  $A$  и  $B$  рассматриваемого узла получим следующие:

$$T(A_1) = 7 \text{ мкм}, \quad T(A_2 B_3) = T(B_3 A_2) = 45 \text{ мкм}, \\ T(B_1) = T(B_2) = T(B_4) = 52 \text{ мкм}.$$

Проверку правильности назначения допусков проведем, используя формулу (7). Сравнивая расчетные значения допусков замыкающих звеньев, полученные при значениях допусков составляющих звеньев, найденных с использованием псевдообратной матрицы, с проектными значениями для рассматриваемого примера, имеем:

$$T_{Y_2}^{расч} = 201 \text{ мкм} > T_{Y_2}^{проект} = 200 \text{ мкм}, \\ T_{Y_1}^{расч} = 52 \text{ мкм} > T_{Y_1}^{проект} = 38 \text{ мкм}.$$

Таким образом, требуется корректировка расчетных допусков составляющих звеньев. Считаем, например, что  $T(A_2 B_3) = T(B_3 A_2) = 31$  мкм,  $T(A_1) = 7$  мкм,  $T(B_1) = T(B_2) = T(B_4) = 52$  мкм. Тогда получим следующие расчетные допуски замыкающих звеньев:

$$T_{Y_1} = 38 \text{ мкм}, \quad T_{Y_2} = 187 \text{ мкм}.$$

Согласно исходным данным рассматриваемого примера, средние отклонения полей допусков исходных звеньев  $A_0$  и  $B_0$  размерных цепей  $A$  и  $B$  соответственно равны:  $\Delta_c(A_0) = 0,021$  мм и  $\Delta_c(B_0) = 0,2$  мм. По формуле (16) получим средние отклонения полей допусков составляющих звеньев:  $\Delta_c(A_1) = 0,017$  мм,  $\Delta_c(A_2) = \Delta_c(B_3) = 0,038$  мм,  $\Delta_c(B_1) = \Delta_c(B_2) = \Delta_c(B_4) = -0,054$  мм. Верификацию расчетных средних отклонений полей допусков составляющих звеньев проведем с использованием соотношений (18).

Расчетные предельные отклонения размеров составляющих звеньев для рассматриваемого примера получим, используя формулы (15) и (16):

$$\Delta S_X^{расч} = \begin{pmatrix} 0,0205 \\ 0,0535 \\ -0,0270 \\ -0,0270 \\ -0,0270 \end{pmatrix}, \quad \Delta I_X^{расч} = \begin{pmatrix} 0,0135 \\ 0,0225 \\ -0,0789 \\ -0,0789 \\ -0,0789 \end{pmatrix}.$$

По формулам (19)–(20), найдем расчетные предельные размеры составляющих звеньев. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Расчетная таблица к решению прямой задачи размерного анализа для размерной схемы на рис. 2 с использованием псевдообратной матрицы

Составляющее звено	Расчетные допуски, мкм	Расчетные предельные отклонения, мм		Расчетные предельные размеры, мм		Номинальный размер (мм), класс допуска, квалитет
		$\Delta S_{x_i}$	$\Delta I_{x_i}$	верхние	нижние	
$A_1$	7	0,021	0,014	72,021	72,014	72 <i>m</i> 4
$A_2 B_3$	31	0,054	0,023	80,054	80,023	80 <i>n</i> 7
$B_1$	52	-0,027	-0,079	41,972	41,92	42 <i>f</i> 8
$B_2$	52	-0,027	-0,079	29,972	29,92	30 <i>f</i> 9
$B_4$	52	-0,027	-0,079	7,972	7,92	52 <i>f</i> 8

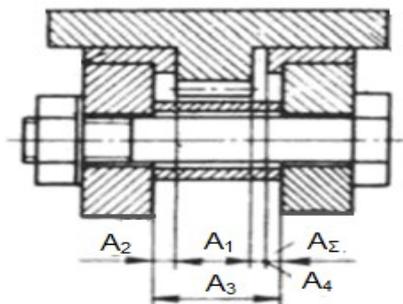
Правильность полученных предельных размеров составляющих звеньев проверяем, решая обратную задачу.

Результаты верификации решения прямой задачи представлены в табл. 2.

**Таблица 2.** Проверочный расчет к решению прямой задачи анализа для размерной схемы на рис. 2

Замыкающее звено	Номинальный размер, мм	Расчетные средние отклонения, мм	Расчетные предельные отклонения, мм		Расчетные предельные размеры, мм	
			$\Delta Y_{c_j}$	$\Delta I_{y_j}$	верхний	нижний
$A_\Sigma$	8	0,021	0,04	0,002	8,04	8,002
$B_\Sigma$	0	0,2	0,29	0,107	0,29	0,107

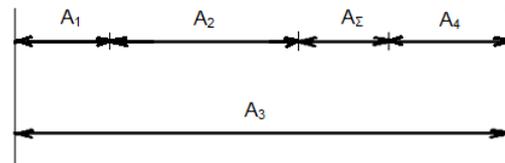
При решении прямой задачи для рассматриваемого примера мы считали, что допуски и средние отклонения полей допусков составляющих звеньев размерных цепей получены по формуле (16), т. е. без учета степени сложности и точности изготовления при возможных финишных операциях. Предположим, что допуски на составляющие звенья и средние отклонения полей допусков составляющих звеньев необходимо назначить с учетом предполагаемой технологии изготовления деталей по возможным финишным операциям. Исходные данные и результаты решения прямой задачи с использованием псевдообратной матрицы для рассматриваемого примера представлены в табл. 3.



**Рис. 3.** Сборочная единица

Рассмотрим далее решение прямой задачи размерного анализа узла с использованием псевдообратной матрицы методом полной взаимозаменяемости для случая, когда размерная схема состоит из одной размерной цепи.

В качестве примера рассмотрим сборочную единицу, показанную на рис. 3. Предположим, что по служебному назначению узла требуется, чтобы размер зазора  $A_\Sigma$  был выдержан в пределах:  $A_0^{max} = 0,75$  мм,  $A_0^{min} = 0,05$  мм.



**Рис. 4.** Размерная схема сборочной единицы на рис. 3

Считаем, что известны номинальные размеры деталей  $A_1 = 16$  мм,  $A_2 = 4$  мм,  $A_3 = 24$  мм,  $A_4 = 4$  мм. Определим допуски для всех размеров составляющих звеньев двумя способами: с использованием псевдообратной матрицы и методом равных допусков.

**Таблица 3.** Исходные данные и результаты решения прямой задачи размерного анализа с учетом точности изготовления и с использованием псевдообратной матрицы для размерной схемы на рис. 2

Звенья	Возможная финишная технологическая операция	Размеры (мм), класс точности, квалитет	Допуски, мкм	Среднее отклонение поля допуска, мм	Расчетные предельные отклонения, мм
$A_1$	Токарная обработка	72 $j_5$	13	0	72 <sup>+0,0065</sup> <sub>-0,0065</sub>
$A_2B_3$	Токарная обработка	80 $n_5$	13	0,0265	80 <sup>+0,033</sup> <sub>+0,020</sub>
$B_1$	Токарная обработка	42 $l_8$	39	-0,0695	42 <sup>-0,050</sup> <sub>-0,089</sub>
$B_2$	Токарная обработка	30 $h_9$	52	-0,026	30 <sub>-0,052</sub>
$B_4$	Токарная обработка	8 $d_9$	36	-0,058	8 <sup>-0,040</sup> <sub>-0,076</sub>
$A_0$	Сборка	По условию задачи	26 (расчетный)	0,0265 (расчетное)	8 <sup>+0,0395</sup> <sub>+0,0135</sub>
$B_0$			140 (расчетный)	0,18 (расчетное)	0 <sup>+0,25</sup> <sub>+0,11</sub>

Полагая средние отклонения полей допусков составляющих размеров размерной цепи равными:  $\Delta_c(A_2) = -0,06$  мм,  $\Delta_c(A_3) = -0,105$  мм,  $\Delta_c(A_4) = -0,06$  мм, определим предельные отклонения и предельные размеры компонентов рассматриваемого узла.

Размерная схема представлена на рис. 4, звено  $A_\Sigma$  является исходным (в дальнейшем будем обозначать его через  $A_0$ ), составляющие звенья —  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , причем звено  $A_4$  — увеличивающее, а звенья  $A_1, A_2, A_3$  — уменьшающие.

Матрица  $Q$  переходных коэффициентов и псевдообратная матрица  $Q^+$  имеют вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \end{pmatrix}^T.$$

Номинальное значение размера зазора по формуле (5) получаем равным 0, т. е.  $A_0^{ном} = 0$  мм.

Из условия задачи имеем среднее отклонение поля допуска исходного звена, равное 0,4 мм, а допуск на размер зазора составляет 0,7 мм.

Допуски составляющих звеньев найдем, используя формулу (13). Тогда матрица допусков составляющих звеньев имеет вид:

$$T_X = (0,175 \ 0,175 \ 0,175 \ 0,175)^T.$$

Здесь  $T$  — символ транспонирования.

Учитывая средние отклонения полей допусков составляющих размеров размерной цепи, заданные в условии задачи, найдем среднее отклонение поля допуска звена  $A_1$ , используя соотношение (18):

$$-\Delta x_{c1} + \sum_{i=2}^4 q_i \cdot \Delta x_{ci} = \Delta y_c^{проект}.$$

Получим  $\Delta_c(A_1) = -0,385$  мм.

**Таблица 4.** Результаты решения прямой задачи размерного анализа с использованием псевдообратной матрицы и методом равных допусков для размерной схемы на рис. 4

Звенья	Расчетные допуски, мм		Размеры и расчетные отклонения, мм
	С использованием псевдообратной матрицы	Метод равных допусков	
$A_1$	0,175	0,175	16 <sup>-0,2975</sup> <sub>-0,4725</sub>
$A_2$	0,175	0,175	4 <sup>+0,0275</sup> <sub>-0,1475</sub>
$A_3$	0,175	0,175	24 <sup>-0,0175</sup> <sub>-0,1925</sub>
$A_4$	0,175	0,175	4 <sup>+0,0275</sup> <sub>-0,1475</sub>
$A_0$	0,7	0,7	0 <sup>+0,75</sup> <sub>+0,05</sub>

В табл. 4 представлены расчетные допуски составляющих звеньев, найденные с использованием псевдообратной матрицы и полученные способом равных допус-

ков. Из таблицы видим, что допуски составляющих звеньев размерной цепи, рассчитанные с использованием псевдообратной матрицы и способом равных допусков, совпадают.

**Идентифицируемость размерной схемы.** Выявление размерной схемы изделия является наиболее ответственным этапом при решении задач размерного анализа. От него зависят результаты анализа. Ситуации, когда в размерную схему сборочной единицы включены, например, звенья, размеры, которых не влияют на основные размерные характеристики узла, или когда имеется избыточное количество составляющих и замыкающих звеньев, могут приводить к невозможности получить решение задач размерного анализа.

Размерную схему сборочной единицы со связанными линейными размерными цепями будем считать идентифицируемой, если идентифицируема аналитическая модель размерной схемы. Это означает, что аналитическая модель размерной схемы изделия (называем ее структурной моделью), представленная формулой (1), и приведенная модель размерной схемы (т. е. разрешенная относительно основных размеров сборочной единицы) имеют единственное соответствие.

На рис. 5 показана размерная схема изделия, состоящая из взаимосвязанных линейных размерных цепей, относящаяся ко второй группе: замыкающее звено  $A_{\Sigma}$  размерной цепи  $A$  является составляющим звеном  $B_2$  размерной цепи  $B$ .

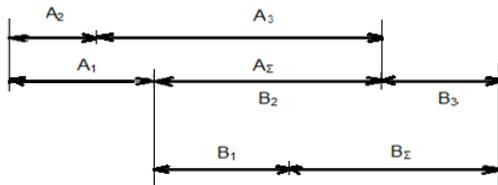


Рис. 5. Размерная схема

Введем обозначения для замыкающих и составляющих звеньев размерных цепей  $A$  и  $B$ :

$$A_{\Sigma} (B_2) = y_1, B_{\Sigma} = y_2, A_1 = x_1, A_2 = x_2, A_3 = x_3, \\ B_1 = x_4, B_3 = x_5.$$

Тогда структурная и приведенная модели размерной схемы, показанной на рис. 5, будут соответственно следующими:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - y_1 = 0, \\ -x_4 + x_5 - y_1 + y_2 = 0, \end{cases} \quad (20)$$

и;

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5. \end{cases} \quad (21)$$

#### Литература

1. Палей М.А., Романов А.Б., Брагинский В.А. Допуски и посадки: справ. в 2 ч. 9-е изд., перераб. и доп. СПб.: Политехника, 2011. Ч. 2. 629 с.
2. Дунаев П.Ф. Размерные цепи. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машгиз, 1963. 308 с.
3. Суслов А.Г., Базров Б.М., Безязычный В.Ф. Научные технологии в машиностроении. М.: Машиностроение, 2012. 528 с.

Определим необходимые и достаточные условия идентифицируемости размерной схемы сборочной единицы.

Введем обозначения: общее количество замыкающих звеньев размерной схемы узла —  $n$ ; общее количество составляющих звеньев в размерной схеме —  $m$ ; количество составляющих звеньев цепи  $Z_i$ , которые содержатся в размерной схеме узла, но не входят в цепь  $Z_i$  —  $D_i$ ; количество замыкающих звеньев цепи  $Z_i$  —  $H_i$ .

Необходимое условие идентифицируемости структурной модели размерной цепи  $Z_i$  изделия: количество звеньев (составляющих и замыкающих) размерной схемы изделия, отсутствующих в цепи  $Z_i$ , должно быть равно  $(H_i - 1)$ , т. е.  $D_i = H_i - 1$ . Если  $D_i < H_i - 1$ , то модель размерной цепи узла неидентифицируема. В этом случае необходимо внести корректировки в размерную схему узла (например, уменьшить количество составляющих звеньев).

Если все размерные цепи размерной схемы изделия идентифицируемы, то такая размерная схема является идентифицируемой.

Достаточное условие идентифицируемости структурной модели размерной цепи  $Z_i$ , входящей в размерную схему изделия: структурная модель размерной цепи  $Z_i$  идентифицируема, если по отсутствующим в ней звеньям (составляющим, замыкающим) размерной схемы можно составить матрицу  $M_i$ , определитель которой отличен от нуля, а ее ранг  $R(M_i) < L_i$ , где  $L_i$  — количество замыкающих звеньев в размерной схеме изделия, без учета рассматриваемой размерной цепи  $Z_i$ .

Все размерные схемы сборочных единиц, рассмотренные в этом исследовании, являются идентифицируемыми.

#### Заключение

Разработан подход к анализу точности размерных характеристик изделий машиностроения методом полной взаимозаменяемости с использованием псевдообратной матрицы для случая, когда размерная схема изделия представлена параллельно связанными линейными размерными цепями, который позволяет принять обоснованное решение о целесообразности принятой размерной схемы сборочной единицы для проведения анализа на ранних стадиях проектирования. Полученные расчетные формулы для решения прямой и обратной задач анализа точности размерных характеристик сборочных единиц могут быть использованы при автоматизированном проектировании.

4. Шамин В.Ю. Теория и практика решения конструкторских и технологических размерных цепей: Компьютерная версия учебного пособия. 4-е изд., перераб. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. 530 с.
5. Климов В.Н., Перминова Е.А. Методика расчетов размерных цепей в приборных устройствах на этапе проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 51 с.
6. Медарь А.В. Точностной анализ в технологическом проектировании сборочных процессов // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2009. № 1. С. 37-42.
7. Расторгуев Г.А. Расчет и анализ сборочной размерной цепи // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2008. № 11. С. 43-46.

8. Исаев С.В. Методика экспериментальной оценки линейной модели пространственной размерной цепи // Измерительная техника. 2006. № 11. С. 17-20.
9. Хвашевская Л.Ф., Шабалин А.В. К проблеме обеспечения точности в изделиях машиностроения // Вестник ИрГТУ. 2014. № 1. С. 25-29.
10. Расторгуев Г.А. Расчет и анализ сборочной размерной цепи // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2008. № 11. С. 43-46.
11. Филькин Д.М. Совершенствование размерно-точностного анализа при проектировании и изготовлении машин // Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления: материалы VII Междунар. междуз. науч.-технической конф. студентов, магистров и аспирантов (3-4 мая 2007 г.). Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2007. С. 32-33.
12. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K., Vaz A.J. Tolerance synthesis of mechanical assemblies: a survey Proceedings of 10th National Conference on Machines and Mechanism (NaCoMM), IIT Kharagpur, 21-22 December (2001). P. 333-341.
13. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K. Advanced Optimal Tolerance Design of Mechanical Assemblies with Interrelated Dimension Chains and Process Precision Limits, Computers in Industry 56(2). 2005. P. 179-194.
14. Ji S., Li X., Ma Y., Cai H. Optimal tolerance allocation based on fuzzy comprehensive evaluation and genetic algorithm // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2000. 16. P. 461-468.
15. Greenwood W.H., Chase K.W. A new tolerance analysis method for designers and manufactures, Transactions of the ASME // Journal of Engineering for Industry. 1987. 109. P. 112-116.
16. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K. Tolerance allocation with alternative manufacturing processes-suitability of genetic algorithm // International Journal of Simulation Modelling. 2003. 2 (1/2). P. 22-34.
17. Muholzoev A.V., Masyagin V.B. Calculation of tolerances of closing links dimensional circuits on the basis of the algorithm Floyd-Warshall, in: Proceeding of Manufacture and operation of the development problems of rocket and space technology, and training of engineers for the aerospace industry, materials IX All-dedicated to the memory of Chief Designer scientific conference on Flight A.S. Klinyshkova, OmGTU, Omsk. (2015). P. 276-283.
18. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
19. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 16-25.
20. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Матричные методы в теории и практике систем управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 667 с.
21. uchebnogo posobiya. 4-e izd., pererab. CHelyabinsk: Izd-vo YUUrGU, 2005. 530 p.
22. Klimov V.N., Perminova E.A. Methodology for calculating dimensional chains in instrument devices at the design stage. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2007. 51 p.
23. Medar' A.V. Precision analysis in technological design of assembly processes // Assembling in Mechanical Engineering and Instrument-Making. 2009. № 1. P. 37-42.
24. Rastorguev G.A. Calculation and analysis of the assembly dimensional chain // Assembling in Mechanical Engineering and Instrument-Making. 2008. № 11. P. 43-46.
25. Isaev S.V. Technique of experimental evaluation of a linear model of a spatial dimensional chain // Measurement Techniques. 2006. № 11. P. 17-20.
26. Hvashevskaya L.F., SHabalin A.V. On the problem of ensuring accuracy in mechanical engineering products // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2014. № 1. P. 25-29.
27. Rastorguev G.A. Calculation and analysis of the assembly dimensional chain // Assembling in Mechanical Engineering and Instrument-Making. 2008. № 11. P. 43-46.
28. Fil'kin D.M. Improvement of dimensional and accuracy analysis in the design and manufacture of machines // Issledovaniya i razrabotki v oblasti mashinostroeniya, energetiki i upravleniya: materialy VII Mezhdunar. mezhvuz. nauch.-tekhnicheskoy konf. studentov, magistrov i aspirantov (3-4 maya 2007 g.). Gomel': GGTU im. P.O. Suhogo, 2007. P. 32-33.
29. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K., Vaz A.J. Tolerance synthesis of mechanical assemblies: a survey Proceedings of 10th National Conference on Machines and Mechanism (NaCoMM), IIT Kharagpur, 21-22 December (2001). P. 333-341.
30. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K. Advanced Optimal Tolerance Design of Mechanical Assemblies with Interrelated Dimension Chains and Process Precision Limits, Computers in Industry 56(2). 2005. P. 179-194.
31. Ji S., Li X., Ma Y., Cai H. Optimal tolerance allocation based on fuzzy comprehensive evaluation and genetic algorithm // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2000. 16. P. 461-468.
32. Greenwood W.H., Chase K.W. A new tolerance analysis method for designers and manufactures, Transactions of the ASME // Journal of Engineering for Industry. 1987. 109. P. 112-116.
33. Singh P.K., Jain S.C., Jain P.K. Tolerance allocation with alternative manufacturing processes-suitability of genetic algorithm // International Journal of Simulation Modelling. 2003. 2 (1/2). P. 22-34.
34. Muholzoev A.V., Masyagin V.B. Calculation of tolerances of closing links dimensional circuits on the basis of the algorithm Floyd-Warshall, in: Proceeding of Manufacture and operation of the development problems of rocket and space technology, and training of engineers for the aerospace industry, materials IX All-dedicated to the memory of Chief Designer scientific conference on Flight A.S. Klinyshkova, OmGTU, Omsk. (2015). P. 276-283.
35. Voevodin V.V., Kuznecov YU.A. Matrices and calculations. M.: Nauka, 1984. 320 p.
36. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. On the computation of a pseudoinverse matrix. General case // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2018. № 1. P. 16-25.
37. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Matrix methods in the theory and practice of aircraft control systems. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2016. 667 p.

#### References

1. Palej M.A., Romanov A.B., Braginskij V.A. Tolerances and landings: sprav. v 2 ch. 9-e izd., pererab. i dop. SPb.: Politekhnik, 2011. CH. 2. 629 p.
2. Dunaev P.F. Dimensional chains. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Mashgiz, 1963. 308 p.
3. Suslov A.G., Bazrov B.M., Bez"yazychnyj V.F. Science-intensive technologies in mechanical engineering. M.: Mashinostroenie, 2012. 528 p.
4. SHamin V.YU. Theory and practice of solving design and technological dimensional chains: Komp'yuternaya versiya