

Теория погружения сваи в грунт при продольно-вибрационном воздействии

В.А. Коронатов^а, С.Н. Герасимов^б, И.В. Дудина^с

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

^а kortavik@mail.ru, ^б sdm_gerasimov@rambler.ru, ^с dydina_irina@mail.ru

^а <https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>, ^б <https://orcid.org/0000-0002-7683-6942>, ^с <https://orcid.org/0000-0001-6047-4839>

Статья поступила 18.11.2020, принята 20.11.2020

Предполагается существование двух фаз взаимодействия сваи с грунтом: упругих деформаций — когда погружение не происходит, а грунтом частично теряются прочностные свойства за счет вибрационного воздействия (подготовительная фаза), и пластических деформаций — когда свая погружается в грунт на глубину обработанного слоя (активная фаза). Процесс погружения тем самым представляется как почти периодический процесс с последовательным повторением указанных фаз и кратковременными остановками. Сама модель взаимодействия сваи с грунтом в сравнении с существующими заметно упростилась: отпала необходимость в качестве промежуточных звеньев между торцом сваи и грунтом вводить скользящую пробку, полозья и упругие связи. Для реализации вышесказанного был предложен новый способ аналитического задания силы лобового сопротивления в виде аппроксимации Паде, определяющей ее прямую пропорциональную зависимость от скорости погружения и обратно пропорциональную — от произведения квадрата частоты вибрационной силы на время обработки очередного слоя грунта. Последнее выражает известный экспериментальный факт об изменении прочностных свойств грунта при вибрационном воздействии. Найденное аналитическое выражение для силы лобового сопротивления позволяет моделировать процесс погружения сваи с учетом возможности кратковременных остановок — до сих пор это удавалось делать только с помощью сухого трения. Появилась и возможность введения динамического напряжения, возникающего в грунте под воздействием сваи, которое позволяет выявлять способность сваи совершать погружение в текущий момент. Приведено подробное описание погружения сваи в простейшей постановке, когда амплитуда вибрационной силы меньше силы тяжести сваи, что исключает для нее возможность кратковременных отрывов от поверхности грунта. Определена максимально возможная глубина погружения сваи при данном силовом воздействии. Впервые определяется не лобовое сопротивление через возникающие напряжения, а наоборот — динамические напряжения грунта через динамическое лобовое сопротивление сваи.

Ключевые слова: свая; шпунт; вибропогружение; продольно-вибрационное погружение; упругопластический грунт; динамическое напряжение; лобовое сопротивление; боковое трение сваи; погружение с остановками.

Theory of pile immersion in the ground under longitudinal vibration action

V.A. Koronатов^а, S.N. Gerasimov^б, I.V. Dudina^с

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^а kortavik@mail.ru, ^б sdm_gerasimov@rambler.ru, ^с dydina_irina@mail.ru

^а <https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>, ^б <https://orcid.org/0000-0002-7683-6942>, ^с <https://orcid.org/0000-0001-6047-4839>

Received 18.11.2020, accepted 20.11.2020

It is assumed that there are two phases of interaction of the pile with the soil: elastic deformations - when immersion does not occur, and the soil partially loses its strength properties due to vibration action (preparatory phase), and plastic deformations - when the pile is immersed in the soil to the depth of the treated layer (active phase). Thus, the immersion process is represented as an almost periodic process with a sequential repetition of the indicated phases and short stops. The very model of the interaction of the pile with the soil in comparison with the existing ones is noticeably simplified: there is no longer the need to introduce a sliding plug, runners and elastic ties as intermediate links between the end of the pile and the soil. To implement the above, a new method of analytical specification of the drag force was proposed in the form of a Padé approximation, which determines its direct proportional dependence on the sinking speed and inversely proportional to the product of the square of the vibration force frequency by the processing time of the next soil layer. The latter expresses the well-known experimental fact about the change in the strength properties of the soil under vibration. The found analytical expression for the drag force makes it possible to simulate the pile sinking process, taking into account the possibility of short-term stops - so far it has been possible to do this only with the help of dry friction. There was also the possibility of introducing a dynamic stress arising in the soil under the influence of a pile, which makes it possible to reveal the ability of the pile to sink at the current moment. A detailed description of the pile sinking in the simplest setting, when the amplitude of the vibration force is less than the gravity of the pile, is given, which excludes the possibility of short-term separation from the soil surface. The maximum possible immersion depth of the pile was determined for a given force action. For the first time, it is not the drag through the arising stresses that is determined, but, on the contrary, the dynamic stresses of the soil through the dynamic drag of the pile.

Keywords: pile; sheet pile, vibration immersion; longitudinal vibration immersion; elastoplastic soil; dynamic tension; drag; lateral friction of the pile; dive with stops.

Введение. Краткая история этого вопроса такова. Задачи на погружение свай были востребованы нашей промышленностью в 50-е гг. прошлого столетия, во время строительства крупных гидроэлектростанций. Для наилучшего использования техники ведения свайных работ возникла необходимость в изучении этого вопроса. Что в начале попытались сделать инженеры-практики, применяя законы механики. Однако скоро выяснилось, что для задач, которые можно назвать задачами нового типа, в механике нет подходящего инструментария — привычные подходы и методы аналитического задания силы лобового сопротивления здесь явно не годились. Ведь было необходимо описывать процесс погружения с остановами, учитывая прочностные свойства грунта. Неудачный выбор вида силы лобового сопротивления [1–3] приводил к неудовлетворительным результатам, которые плохо согласовывались с наблюдаемым реальным процессом, и не позволял учитывать возможность кратковременных заклиниваний свай в погружении. Сила лобового сопротивления, кроме того, как и большинство сил сопротивления, должна зависеть от скорости погружения, а также желательно было бы найти способ, позволяющий реагировать силе сопротивления на изменение прочностных свойств грунта вследствие вибрационного воздействия. По мнению авторов, содержание существующих публикаций говорит о неудовлетворительном состоянии этого вопроса. Установившаяся практика такова, что в настоящее время с помощью сухого трения [4–12] неплохо моделируются кратковременные заклинивания, но без учета изменения скорости погружения сваи и влияния вибраций на прочностные свойства грунта. Поэтому такой подход для подобных задач выглядит не слишком убедительно. А попытки вводить силу лобового сопротивления через постоянную силу или в виде силы упругости [1; 2; 12] выглядит чересчур упрощенно и не позволяет моделировать погружение с остановами.

Определение лобового сопротивления непосредственно через возникающие напряжения в грунте под свайей, что часто пытаются делать, приводит к сложным интегральным выражениям. И к тому же, строго говоря, неверным выражениям: ведь возникают не статические, а динамические напряжения, заранее неизвестные. Такие выражения, как правило, не интегрируются, и поэтому их применение вызывает большие сложности. Определение их численным путем вызывает определенные трудности при решении конкретных задач и, кроме того, затрудняет понимание физики протекающих процессов. Нечто подобное наблюдалось ранее при определении результирующих компонент сил сухого трения при скольжении тел с верчением [14], которые также было общепринято искать через статические напряжения напрямую. Пренебрегать силой лобового сопротивления, как это иногда делают, никак нельзя — она напрямую влияет на формирование динамических напряжений в грунте. Такие динамические напряжения и играют определяющую роль в выявлении возможности погружения сваи в грунт на текущий момент. И именно эта сторона вопроса, на взгляд авторов, отсутствует в существующих работах по вибропогружению свай. И попытки учесть волновые явления в

свае или грунте не спасают положение: ведь, чтобы использовать более тонкий инструмент исследования, надо научиться учитывать основные факторы, влияющие на текущий процесс.

К первым попыткам найти ответы на указанные вопросы следует отнести работы инженера Д.Д. Баркана [1], который выдвинул предположение о разжижении грунта под воздействием вибрационной силы. Ю.И. Неймарк, к которому обратился за помощью Д.Д. Баркан, эту идею отверг и предложил использовать при моделировании таких задач сухое трение [15], что в последующем стало использоваться и другими авторами [4–12]. Применение сухого трения для задач подобного вида в дальнейшем стало общепринятым, и такая принципиальная основа подхода остается прежней до сих пор. В настоящее время интерес к этому вопросу несколько упал. На взгляд авторов, из-за отсутствия свежих идей, а также в связи с появлением вибропогружателей с большим запасом мощности.

Идея Д.Д. Баркана, как представляется авторам, была отвергнута совершенно незаслуженно. Правда, если бы Ю.И. Неймарк и принял эту идею, то, как уже отмечалось выше и что подтверждает история развития этого вопроса, соответствующего инструментария для ее воплощения при моделировании на тот момент не существовало. В данной работе авторы возвращаются к той давней идее, говорящей о возможности разжижения грунта под вибрационным воздействием. Только вместо разжижения грунта в буквальном смысле — а Д.Д. Баркан именно это и подразумевал — будет предполагаться потеря прочностных свойств грунта, а точнее, его верхнего слоя под действием сваи. Об этом говорят и многочисленные экспериментальные факты [1–3; 8; 9; 13].

Гипотеза о потере прочности грунта. Наблюдения показывают, что если сваю просто поставить на грунт, то она только под действием собственного веса погружаться не будет. Погружение не произойдет и при не столь значительном статическом увеличении продольной силы. Если же на сваю оказать вибрационное воздействие, то она может начать погружение. Причем возможность такого погружения будет зависеть как от амплитуды, так и от квадрата частоты вибрационной силы [1; 2]. Существенно и то, что погружение начинается не сразу, а через некоторое время после начала действия вибрационной силы. Отмеченное дает основание высказать гипотезу, что прочностные свойства грунта зависят от квадрата частоты и продолжительности вибрационного воздействия на текущий слой. Об этом говорят напрямую и косвенно соответственно работы [1; 2] и [3; 8; 9; 13]. На основании этого предлагается для силы лобового сопротивления F_c (см. рис.), в отличие от обычных аналитических выражений, ввести зависимость не только от скорости погружения \dot{x} — прямую пропорциональную зависимость от нее, а еще и зависимость от произведения квадрата частоты ω^2 вибрационного воздействия на временной интервал $t-t_0$ такого воздействия на текущий слой грунта, только обратно пропорциональную (t_0 — момент времени начала такого воздействия). Причем именно про-

изведения $\omega^2(t-t_0)$, так как по отдельности ω^2 и $(t-t_0)$ не будут играть указанной роли. Такую зависимость лучше задавать в виде аппроксимации Паде:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR\omega^2(t-t_0) + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь Δ, b – коэффициенты аппроксимации, зависящие от прочностных свойств грунта и определяемые экспериментально; R – размер, определяющий смещение центра масс дебаланса у вибратора; x – координата углубления сваи; точкой $\langle \cdot \rangle$ обозначается дифференцирование по времени t ; F_0 – максимальное значение силы сопротивления, определяемое из условия равновесия сваи перед началом погружения. Аппроксимация Паде была взята за основу для задания силы лобового сопротивления как хорошо зарекомендовавшая себя для подобного рода задач на погружение [16–20].

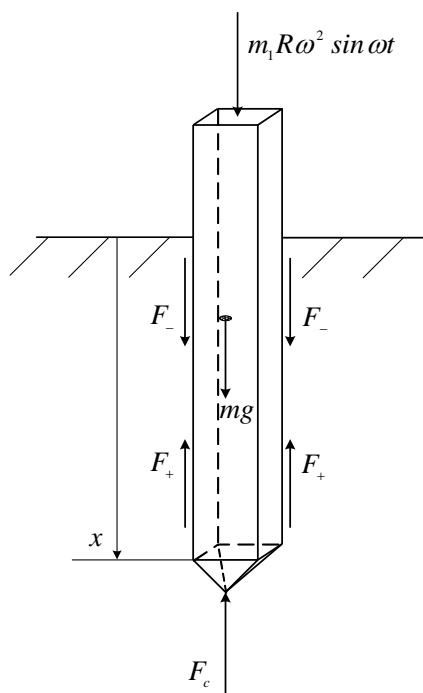


Рис. Динамическая модель взаимодействия сваи с грунтом

В частности, она позволяет моделировать процесс погружения и с учетом кратковременных заклиниваний — ранее такое удавалось делать только с помощью сухого трения. В отличие от использования сил сухого трения, появляется возможность возникающие динамические напряжения напрямую выразить через силу лобового сопротивления, а также найти и предельно допустимое динамическое напряжение, превышение которого приводит к началу погружения сваи.

Основные принципы теории погружения. При построении теории будем исходить из следующих предположений:

1. Свая является абсолютно жестким телом.
2. Вибрационное воздействие на сваю не способствует возникновению соответствующих вибраций в грунте, т. е. если они и возникают, то очень быстро

затухают, не оказывая существенного влияния на описываемые процессы (эти первые два пункта означают, что волновыми явлениями в свае и грунте будем полностью пренебрегать).

3. Грунт является достаточно плотным и обладает определенными упругопластическими свойствами, что предполагает отсутствие возможности погружения сваи только под воздействием собственного веса, а также при добавлении незначительной статической продольной силы вдоль оси сваи — что обычно и наблюдается в производственной практике.

4. Прочностные свойства грунта могут изменяться при вибрационном воздействии, через проявление сначала упругих свойств — отсутствие погружения, а затем и пластических — в виде погружения сваи.

5. Мерой вибрационного воздействия на грунт принимается величина $\omega^2(t-t_0)$, что было замечено экспериментально и подтверждено в производственной деятельности [1; 2].

6. Сила лобового сопротивления сваи, возникающая со стороны грунта, определяется аналитически в виде аппроксимации Паде по формуле (1).

7. При вибрационном воздействии сваи на грунт будут различаться следующие фазы: упругого взаимодействия, во время которой грунтом теряются упругие и частично прочностные свойства; пластических деформаций — когда свая погружается в грунт.

8. Момент остановки сваи во время погружения будет означать, что свая достигла следующего необработанного вибрацией слоя грунта, на котором снова будут проявляться сначала только упругие свойства, как это было перед началом вибрационного воздействия; глубина обработанного слоя грунта, где были утрачены упругие свойства, заранее неизвестна.

9. Временной интервал $t-t_0$ вибрационного воздействия определяется как время обработки каждого слоя грунта по отдельности, т. е. соответствует времени двух последовательных фаз упругого и пластического взаимодействия, после чего отсчет времени вибрационного воздействия на новый слой начинается заново.

10. Процесс погружения представляется как почти периодический процесс с последовательным повторением указанных фаз и кратковременными остановками.

При достаточном сильном воздействии на грунт вибрационной силой — высокочастотном — и достаточной амплитуде погружение сваи может происходить без кратковременных остановок до момента полного погружения сваи на заданную глубину. При ограниченном воздействии этап погружения может происходить с кратковременными остановками. В последнем варианте фазы упругого взаимодействия и пластических деформаций грунта будут последовательно периодически повторяться. Прохождение фазы упругого взаимодействия можно объяснить как подготовительным этапом обработки очередного слоя грунта вибрационными силами, в результате которой частично теряются прочностные свойства — либо полной потерей упругих свойств, путем разрыхления соответствующего слоя, либо — только частично. Глубина слоя грунта, ослабленного вибрационными силами, заранее неизвестна,

она определяется в процессе моделирования через глубину очередного этапа погружения.

Пример описания вибрационного погружения сваи. Рассмотрим простейшую задачу о погружении при продольном вибрационном воздействии, когда амплитуда вибрационного воздействия не превышает силу тяжести сваи. В этом случае кратковременные отрывы сваи от поверхности грунта исключаются, что позволит более ясно увидеть, что дает новый подход при моделировании подобных процессов. Обозначим через m, m_1 соответственно массу сваи и дебаланса вибрационной машины. Силу лобового сопротивления сваи будем искать в соответствии с вышесказанным по формуле (1). Сила бокового трения сваи F_+ определяется по известной формуле Амонтона – Кулона: $F_+ = \tilde{f}ax$, где f — погонная сила трения, приходящаяся на единицу площади боковой поверхности; \tilde{a} — периметр поперечного сечения сваи. Причем:

$$f = \begin{cases} [-f_1; f_1] \text{ при } \dot{x} \equiv 0; \\ f_0 \text{ при } \dot{x} > 0 \ (\varepsilon = f_1 / f_0 > 1). \end{cases}$$

Заметим, что обозначенная на рисунке сила трения противоположного направления F_- в нашей модельной задаче возникать не будет, так как свая при указанных условиях не сможет двигаться вверх.

Далее опишем погружение сваи согласно приведенному выше сценарию развития процесса.

1. Фаза упругого взаимодействия:

$$\dot{x} \equiv 0, f \in [-f_1; f_1]: \quad x = \begin{cases} 0, \text{ при } t = 0; \\ x_{**} \text{ при } t > 0; \end{cases}$$

$$t_0 = \begin{cases} 0, \text{ при } x = 0; \\ t_{**}, \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь t_{**}, x_{**} — соответственно время и координата погружения в конце фазы пластических деформаций, если она уже состоялась, — что может быть, если эта фаза упругого взаимодействия не самая первая. Свая удерживается упругими силами грунта, когда выполняется (см. рис.):

$$mg + m_1 R \omega^2 \sin \omega t - F_+ - F_c = 0 \Rightarrow mg(1 + q \sin \omega t - fax) - F_0 \frac{\Delta}{bR\omega^2(t - t_0) + \Delta} = 0,$$

откуда получим, что $F_0 = kmg(1 + q \sin \omega t - fax)$, где приняты обозначения:

$$k = 1 + \frac{bR\omega^2}{\Delta}(t - t_0); \quad \text{— коэффициент динамичности;}$$

$$q = \frac{m_1 R \omega^2}{mg} \quad \text{— приведенная амплитуда вибрационной}$$

$$\text{силы; } a = \frac{\tilde{a}}{mg} \quad \text{— приведенный периметр поперечного}$$

сечения сваи. Условие равновесия сваи после деления на площадь ее поперечного сечения S примет вид:

$$\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_\partial = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{\partial 1} = \frac{\sigma_1}{k_*}.$$

Здесь приняты обозначения:

$$\sigma = \frac{mg(1 + q \sin \omega t - fax)}{S} = \sigma_0(1 + q \sin \omega t - fax);$$

$$\sigma_0 = \frac{mg}{S}$$

— статические нормальные напряжения, возникающие в грунте под торцом соответственно от полной продольной силы и только от силы тяжести сваи; σ_1 — предельное статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально; σ_∂ ; $\sigma_{\partial 1}$ — соответственно динамическое и предельно допустимое динамические напряжения, возникающие в грунте, с учетом динамического воздействия сваи;

$k_* = 1 + \frac{bR\omega^2}{\Delta}(t_* - t_0)$ — критическое значение коэффициента динамичности, где t_* — момент времени окончания текущей фазы упругого взаимодействия.

Условия окончания фазы упругого взаимодействия и перехода к фазе пластических деформаций, проявляющиеся через погружение сваи, будут выражаться, когда одновременно боковое трение покоя достигнет своего предельного значения, а предельно допустимое динамическое напряжение упадет до текущего статического:

$$\begin{cases} \sigma_{\partial 1} = \sigma; \\ f = f_1. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{k_*} = \sigma_0(1 + q \sin \omega t_* - f_1 ax),$$

Это позволит определить сначала значение критического коэффициента динамичности:

$$k_* = \frac{n_1}{1 + q \sin \omega t_* - f_1 ax}, \quad \text{а через него получить и}$$

трансцендентное уравнение для определения момента времени t_* , окончания фазы упругого взаимодействия:

$$t_* = \frac{\Delta}{bR\omega^2} \left(\frac{n_1}{1 + q \sin \omega t_* - f_1 ax} - 1 \right) + t_0, \quad (2)$$

для которого нахождение решений возможно только численными методами. Здесь $n_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ — запас проч-

ности грунта от действия силы тяжести сваи. Заметим, что в самом начале погружения, когда $x = 0$; $t_0 = 0$,

должно выполняться: $\frac{n_1}{1 + q \sin \omega t_*} - 1 > 0$, что является

необходимым условием для возникновения фазы упругих деформаций при заданном силовом воздействии на сваю.

Из формулы (2) следует, что максимально возможную глубину погружения сваи при данном силовом воздействии следует искать по формуле:

$$x_{max} \approx \frac{1 + q}{f_1 a}. \quad (3)$$

Это приближенное соотношение сразу следует из формулы (2), если принять, что $t_* \rightarrow \infty$, что должно соответствовать окончательной остановке погружения сваи. Следует заметить, что максимальная глубина (3) никак не зависит от запаса прочности n_1 грунта для текущего веса сваи, что поначалу вызывало сомнения.

Но в этом никакого противоречия нет: рост запаса прочности данного грунта может происходить только за счет уменьшения веса свай и наоборот. А уменьшение или увеличение веса свай влияет на величину продольной силы, а значит и на глубину погружения, что и нивелирует влияния запаса прочности при нахождении x_{max} .

При переходе к новой фазе взаимодействия свай с грунтом примем во внимание, что наибольшее значение силы лобового сопротивления достигает величины

$$F_{0*} = k_*mg(1 + q \sin \omega t_* - f_1 ax),$$

а в начале погружения свай это значение падает в $\tilde{\epsilon}$ раз ($\tilde{\epsilon} > 1$), оставаясь в дальнейшем (при погружении) постоянной величиной, т. е., как и у трения при переходе от покоя к движению, будет скачок; у бокового трения такой скачок определяется через ϵ .

2. Фаза пластических деформаций (погружения):

$$\dot{x} > 0; \quad f = f_0 = f_1 / \epsilon; \quad F_{0*} \rightarrow F_{0*} / \tilde{\epsilon}.$$

С учетом сделанных выше замечаний о силах сопротивления дифференциальное уравнение движения свай запишется так:

$$\ddot{x} = g \left(1 + q \sin \omega t - \frac{f_1 ax}{\epsilon} \right) - \frac{n_1 g}{\tilde{\epsilon}} \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR\omega^2(t - t_0) + \Delta},$$

которое подразумевает нахождение решений только численными методами. Окончание погружения, а значит и первых двух фаз, следует ожидать, когда $\dot{x} = 0$. В момент окончания погружения следует принять, что $t_{**} = t$ и $x_{**} = x$ и перейти в начало описанного сценария (алгоритма).

После этой фазы снова начинается фаза упругих деформаций грунта с последующим переходом к фазе пластических деформаций, которые следует описывать аналогичным образом. Тем самым, процесс погружения свай предлагается описывать как почти периодический процесс с повторяющимися последовательно друг за другом фазами упругих и пластических деформаций. Очевидно, что продолжительность фаз упругих деформаций будет расти, а продолжительность фаз погружения — наоборот уменьшаться до полной остановки вследствие уменьшения силы давления свай, за счет ее разгрузки увеличивающейся силой бокового трения. Описанный процесс погружения свай нетрудно моделировать на компьютере, используя описанный алгоритм и численные методы. Но это не являлось целью данной статьи.

Выводы. Вышеизложенное дает основание считать, что, по сути, предложена новая теория продольно-

вибрационного погружения свай в грунт, которая предлагает такие нововведения:

1. Предложен новый вид аналитического задания динамической силы лобового сопротивления со стороны грунта в виде аппроксимации Паде, позволяющий:

а) учесть скорость погружения свай — ранее это делать не удавалось;

б) выразить потерю прочности грунта через квадрат частоты и продолжительность вибрационного воздействия на текущий слой — до сих пор потеря прочности никем не учитывалось;

в) моделировать процесс погружения с остановками по-новому — ранее такое удавалось делать только с помощью сухого трения;

д) ввести динамическое напряжение, возникающее в грунте от воздействия свай — это впервые позволило напрямую, через напряжения выявлять способность свай в текущий момент времени совершать погружение;

е) упростить модель взаимодействия свай с грунтом без привлечения экзотичных элементов в виде скользящей пробки, ползьев и упругих связей — раньше отсутствовали возможности заложить в модель нужные свойства с помощью привычного инструментария механики.

2. Здесь впервые определяется не лобовое сопротивление через возникающие напряжения, а наоборот — динамические напряжения грунта через динамическое лобовое сопротивление свай.

3. На приведенном примере показан процесс погружения, состоящий из двух фаз взаимодействия свай с грунтом: упругих деформаций — когда погружения не происходит, а грунтом частично теряются прочностные свойства за счет вибрационного воздействия (подготовительная фаза), и пластических деформаций — когда свая погружается в грунт на глубину обработанного слоя (активная фаза).

4. Процесс погружения представляется как почти периодический процесс с последовательным повторением указанных фаз и кратковременными остановками.

5. Определена максимально возможная глубина погружения свай при данном силовом воздействии.

В данной статье не обсуждался вопрос о вибрационном погружении свай с учетом вращательной составляющей движения. Для такого, более общего случая моделирования необходимо принять во внимание несколько иной механизм потери прочности грунта и некоторые особенности учета сил бокового трения, но это уже тема отдельной статьи.

Литература

1. Баркан Д.Д. Виброметод в строительстве. М.: Гостройиздат, 1959. 316 с.
2. Савинов О.А., Лускин А.Я. Вибрационный способ погружения свай и его применение в строительстве. Л.: Гостроиздат, 1960. 252 с.
3. Гончаревич И.Ф., Сергеев П.А. Вибрационные машины в строительстве. М.: Гостехиздат, 1963. 311 с.
4. Неймарк Ю.И. Теория вибрационного погружения и вибровывергивания // Инженерный сборник, 1953, Т. XVI.
5. Кушуль М.Я., Шляхтин А.В. К вопросу вибрационного погружения цилиндрического стержня в упругопластическую среду // Известия АН СССР, ОТН, 1954, № 1.
6. Блехман И.И. Исследование процесса вибрационной забивки свай и шпунтов, Инженерный сборник, 1954, Т. XIX.
7. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 412 с.
8. Блехман И.И. Вибрационная техника. М.: Физматлит, 1994. 400 с.

9. Блехман И.И. Что может вибрация? О «вибрационной механике» и вибрационной технике. М.: ЛЕНАНД, 2017. 216 с.
10. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. М.: Машиностроение, 1981. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э. Левендела. 1981. 509 с.
11. Цейтлин М.Г., Верстов В.В., Азбель Г.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах. Л.: Стройиздат, Ленингр. Отд-ние, 1987. 263 с.
12. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968. 362 с.
13. Пановко Г.Я. Лекции по основам вибрационных машин и технологий. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 192 с.
14. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Институт компьютерных исследований, 2010. 164 с.
15. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство. Н. Новгород: изд-во Нижегородского государственного университета, 2010. 420 с.
16. Коронатов В.А. Начала построения строгой теории бурения // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 4 (32). С. 83–94.
17. Коронатов В.А. Элементы строгой теории бурения. В сб.: Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17). Материалы VI Международной конференции. 2017. С. 221–226.
18. Коронатов В.А. Новый метод описания процесса бурения скважин и обнаружение режимов детерминированного хаоса. В сб.: Проблемы механики современных машин. Материалы VI Международной конференции. Отв. ред. В.С. Балбаров. 2015. С. 127–140.
19. Коронатов В.А., Герасимов С.Н. Вибровращательное погружение диска в пластическую среду и явление атипичного детерминированного хаоса // Системы. Методы. Технологии. - 2017. № 2 (34). С. 21–27.
20. Коронатов В.А. Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3 (39). С. 24–32.
4. Nejmark YU.I. Theory of vibration immersion and vibration pulling // Inzhenernyj sbornik, 1953, V. XVI.
5. Kushul' M.YA., SHlyahin A.V. On the issue of vibrational immersion of a cylindrical rod in an elastic-plastic medium // Izvestiya AN SSSR, OTN, 1954, № 1.
6. Blekhman I.I. Investigation of the process of vibrational driving of piles and sheet piles // Inzhenernyj sbornik, 1954, V. XIX.
7. Blekhman I.I., Dzhaneldidze G.YU. Vibration movement. M.: Nauka, 1964. 412 p.
8. Blekhman I.I. Vibration technology. M.: Fizmatlit, 1994. 400 p.
9. Blekhman I.I. What can vibration do? About «vibration mechanics» and vibration technology. M.: LENAND, 2017. 216 p.
10. Vibrations in technology: Spravochnik. V 6-ti t. M.: Mashinostroenie, 1981. V. 4. Vibracionnye processy i mashiny / pod red. E.E. Levendela. 1981. 509 p.
11. Cejtlin M.G., Verstov V.V., Azbel' G.G. Vibration equipment and technology in piling and drilling operations. L.: Strojizdat, Lenigr. Otd-nie, 1987. 263 p.
12. Byhovskij I.I. Foundations of the theory of vibration technology. M.: Mashinostroenie, 1968. 362 p.
13. Panovko G.YA. Lectures on the basics of vibration machines and technologies. M.: izd-vo MG TU im. N.E. Baumana, 2008. 192 p.
14. Andronov A.A., ZHuravlev V.F. Dry friction in the problems of mechanics. M.: Izhevsk, NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». Institut komp'yuternyh issledovanij, 2010. 164 p.
15. Nejmark YU.I. Mathematical modeling as a science and art. N. Novgorod: izd-vo Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 2010. 420 p.
16. Koronotov V.A. Beginning of constructing a rigorous theory of drilling // Systems. Methods. Technologies. 2016. № 4 (32). P. 83–94.
17. Koronotov V.A. Elements of a rigorous theory of drilling in the collection. V sb.: Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO17). Materialy VI Mezhdunarodnoj konferencii. 2017. P. 221–226.
18. Koronotov V.A. A new method for describing the process of drilling wells and detecting modes of deterministic chaos. V sb.: Problemy mekhaniki sovremennyh mashin. Materialy VI Mezhdunarodnoj konferencii. Отв. ред. V.S. Balбаров. 2015. P. 127–140.
19. Koronotov V.A., Gerasimov S.N. Vibro-rotational immersion of a disc into a plastic medium and the phenomenon of atypical deterministic chaos // Systems. Methods. Technologies. 2017. № 2 (34). P. 21–27.
20. Koronotov V.A. General approach to the determination of resistance forces during rolling, sliding bodies with spinning, drilling, penetration, drilling and smoothing // Systems. Methods. Technologies. 2018. № 3 (39). P. 24–32.

References

1. Barkan D.D. Vibration method in construction. M.: Gostroizdat, 1959. 316 p.
2. Savinov O.A., Luskin A.YA. Vibration method of driving piles and its application in construction. L.: Gostroizdat, 1960. 252 p.
3. Goncharevich I.F., Sergeev P.A. Vibration machines in construction. M.: Gostekhizdat, 1963. 311 p.