

## Использование пружинно-массово-демпферных моделей при анализе колебаний рабочих колес энергетических турбомашин с расстройкой параметров

И.Н. РЫЖИКОВ

Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия  
rin111@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6105-0659>

Статья поступила 30.10.2020, принята 12.11.2020

*Рабочие колеса турбомашин представляют собой циклически симметричные конструкции. В реальном рабочем колесе турбомашин всегда имеются очень малые отклонения от симметрии секторов в результате несовершенства технологий изготовления (так называемая расстройка параметров, или mistuning). Как показали исследования многих авторов, расстройка параметров может оказывать большое влияние на колебания рабочих колес, приводя к их локализации на отдельных лопатках. При этом резко возрастает уровень напряжений в материале этих лопаток, что снижает их долговечность. В статье на основе проведенного анализа работ других авторов выбрана пружинно-массово-демпферная модель (ПМДМ) для анализа собственных колебаний рабочих колес энергетических турбомашин. Данная модель была доработана с целью анализа собственных колебаний рабочих колес с расстройкой параметров и последующего расчета их вынужденных колебаний и долговечности. Основными преимуществами ПМДМ являются низкие требования к компьютерным ресурсам (оперативной памяти, производительности процессора), необходимым для подобных анализов при сохранении достаточно высокой точности. Так, ПМДМ сектора рабочего колеса содержит лишь 1–2 степени свободы по сравнению с традиционной конечноэлементной моделью, имеющей тысячи, а то и десятки тысяч степеней свободы. В этой связи представляется актуальным применение ПМДМ в расчетах колебаний подобного рода конструкций. В данной работе представлены результаты расчетов собственных колебаний реального рабочего колеса в сравнении с экспериментальными данными, полученными в Бранденбургском техническом университете (г. Коттбус, Германия). Малая погрешность свидетельствует о возможности применения доработанной ПМДМ для расчета собственных колебаний рабочих колес энергетических турбомашин и, в дальнейшем, анализа вынужденных колебаний и долговечности этих конструкций.*

**Ключевые слова:** рабочие лопатки ротора; колебания; расстройка параметров; пружинно-массово-демпферная модель; метод конечных элементов.

## The use of the spring-mass-damping model for the analysis of vibrations of the mistuned power turbomachines impeller

I.N. Ryzhikov

Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia  
rin111@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6105-0659>

Received 30.10.2020, accepted 12.11.2020

*Turbomachine impellers are cyclically symmetrical structures. In a real turbomachine impeller, there are always very small deviations from the symmetry of the sectors as a result of imperfect manufacturing technologies (the so-called parameter mismatch or mistuning). Studies by many authors have shown that mistuning can have a large impact on the vibrations of the impellers, leading to their localization on individual blades. This dramatically increases the level of stress in the material of these blades, which reduces their fatigue life. In the article, based on the analysis of other authors' works, a spring-mass-damper model (SMDM) is selected for analyzing the natural vibrations of the impellers of power turbomachines. This model was modified to analyze the natural vibrations of the impellers with mistuning and then calculate their forced vibrations and fatigue life. The main advantages of SMDM are low requirements for computer resources (RAM, processor performance) required for such analyses while maintaining a sufficiently high accuracy. Thus, the SMDM of the impeller sector contains only 1–2 degrees of freedom compared to the traditional finite element model, which has thousands or even tens of thousands of degrees of freedom. In this regard, it is relevant to use SMDM in calculations of vibrations of such structures. This paper presents the results of calculations of natural vibrations of a real impeller in comparison with experimental data obtained at the Brandenburg technical University (Cottbus, Germany). A small error indicates the possibility of using the modified SMDM for calculating the natural vibrations of the impellers of power turbomachines and, in the future, analyzing the forced vibrations and fatigue life of these structures.*

**Keywords:** rotor blades; vibrations; mistuning; spring-mass-damper model; finite element method.

**Введение.** Рабочее колесо ротора турбомашин имеет циклически симметричную конструкцию. При исследовании колебаний колеса его компьютерная модель часто представляет собой набор идеальных симметричных секторов с рабочими лопатками. При этом никакие отклонения от симметрии не учитываются. Однако в реальной конструкции всегда присутствуют очень малые отклонения от симметрии в форме, размерах, характеристиках материалов, крепления и нагружения в результате несовершенства технологий изготовления (так называемая расстройка параметров, или *mistuning*). На основе обзора пружинно-массовых моделей выбрана модель, описанная в работе Nipkau J.<sup>1</sup>. Как утверждают многие авторы [1–12], расстройка параметров часто может оказывать негативное влияние на напряженно-деформированное состояние колеса при его колебаниях, значительно снижая при этом его долговечность. Вместе с тем, учет расстройки при моделировании рабочих колес на основе метода конечных элементов (МКЭ) приводит к значительному усложнению конечно-элементной модели, что требует значительного увеличения компьютерных ресурсов (памяти, производительности). В этой связи разработка экономичных и эффективных методов анализа влияния расстройки на долговечность рабочих колес является весьма актуальной задачей.

Одним из таких методов является метод моделирования колебаний сложных механических систем с помощью аналогичных пружинно-массово-демпферных моделей. Применение данного метода совместно с МКЭ позволит значительно снизить потребляемые компьютерные ресурсы при анализе рабочих колес с расстройкой параметров за счет простоты пружинно-массово-демпферной модели, имеющей значительно меньшее число степеней свободы по сравнению с традиционной КЭМ.

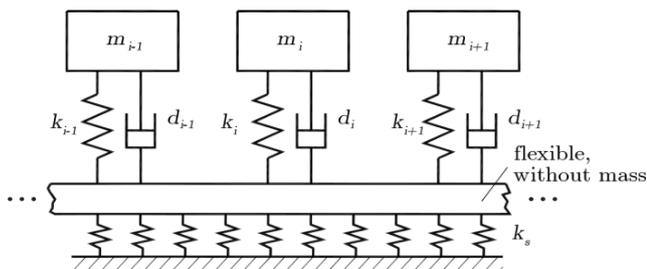


Рис. 1. Модель с упругим диском [13]

**Обзор работ по теме исследования.** Первые упоминания в литературе об использовании пружинно-массовых моделей при исследованиях колебаний рабочих колес появились примерно в середине прошлого столетия. Например, в работе [13] описана модель рабочего колеса с упругим диском, не имеющим массы (рис. 1), для учета влияния упругости диска на частоты колебаний лопаток. Обозначения на рис. 1:  $m$  — масса лопатки;  $k_i$  — жесткость лопатки;  $d_i$  — демпфирование в материале лопатки;  $k_s$  — жесткость диска.

В модели, описанной в [14; 15] (см. рис. 2), присутствуют межлопаточные связи в виде пружинных элементов. Обозначения на рис. 2:  $x$  — перемещения;  $k_c$  — жесткость межлопаточной связи;  $m_b$  — масса лопатки;  $k_b$  — жесткость лопатки;  $d_b$  — демпфирование в материале лопатки.

Модель, описанная в работе [16] (см. рис. 3), отличается от предыдущей модели тем, что массы лопаток соединяются с диском посредством торсионных пружинных элементов. Обозначения на рис. 3:  $m_i$  — масса лопатки;  $k_c$  — жесткость межлопаточной связи;  $r$  — радиус центра масс лопатки;  $k_t$  — крутильная жесткость лопатки.

В модели из работы [17], посвященной исследованию вынужденных колебаний дисков, также применены межлопаточные демпферы.

В работе [18] также использовалась модель с пружинами и демпферами между массами лопаток для определения относительных амплитуд колебаний лопаток вентилятора газотурбинного двигателя с учетом аэродинамических сил. Авторы разработали модель, которая содержит конечно-элементную модель диска, составленную из плоских элементов, и соединенные с ней одномассовые лопатки, имеющие по одной степени свободы. Диск выполнен из полимерного композиционного материала с армированием углеродным волокном. Моделировалось аэроупругое поведение ротора и исследовалось влияние плотности потока на распределение амплитуд колебаний.

В работе [19] описываются более сложные модели, имеющие по две или три степени свободы для каждого сектора.

Таким образом, как отмечают многие исследователи, использование метода моделирования с помощью пружинно-массово-демпферных моделей позволяет получать адекватные результаты при значительной экономии компьютерных ресурсов. Это обстоятельство стало определяющим при выборе метода исследования влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес в данной работе.

**Описание пружинно-массово-демпферной модели при анализе колебаний рабочего колеса с расстройкой параметров.** Авторами была применена пружинно-массово-демпферная модель рабочего колеса, подробно описанная в работе Nipkau J. Каждый сектор данной модели содержит всего две степени свободы.

На рис. 4 представлены модели сектора рабочего колеса без расстройки и с расстройкой. При этом расстройка вводилась путем добавления дополнительной массы  $\Delta m_a$  к массе лопатки. Обозначения на рис. 4:  $k_{sec}$  — жесткость сектора;  $d_{sec}$  — демпфирование в материале сектора;  $m_{sec}$  — масса сектора;  $\delta_i$  — перемещения сектора;  $k_c$  — жесткость межсекторной связи;  $k_b$  — жесткость лопатки;  $d_b$  — демпфирование в материале лопатки;  $m_b$  — масса лопатки;  $\Delta m_a$  — дополнительная масса;  $\delta_N, X_i$  — перемещения лопатки;  $k_a$  — жесткость межлопаточной связи;  $d_a$  — демпфирование в межлопаточной связи.

Уравнение движения при собственных колебаниях рабочего колеса:

$$M \ddot{\delta} + K \delta = 0,$$

<sup>1</sup> Nipkau J. Analysis of mistuned blisk vibrations using a surrogate lumped mass model with aerodynamic influences/ 2010, PhD thesis, Brandenburg University of Technology Cottbus, Cottbus, Germany. 180 p.

где  $M$  — матрица масс;  $K$  — матрица жесткости;  $\ddot{\delta}$  — вектор ускорений узловых точек;  $\delta$  — вектор перемещений узловых точек.

При работе турбомашины колебания лопаток возбуждаются в результате воздействия многих факторов. Уравнение движения при вынужденных колебаниях

рабочего колеса может быть записано в матричном виде:

$$M \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + K \delta = P(t),$$

где  $D$  — матрица демпфирования;  $\dot{\delta}$  — вектор скоростей узловых точек;  $P(t)$  — вектор переменных возбуждающих нагрузок.

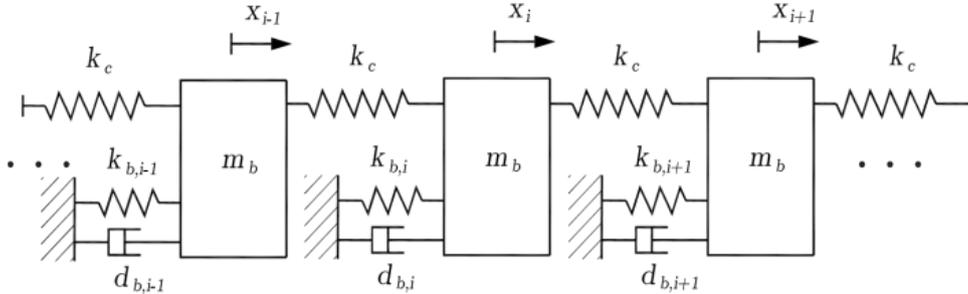


Рис. 2. Модель с межлопаточными пружинными элементами [14; 15]

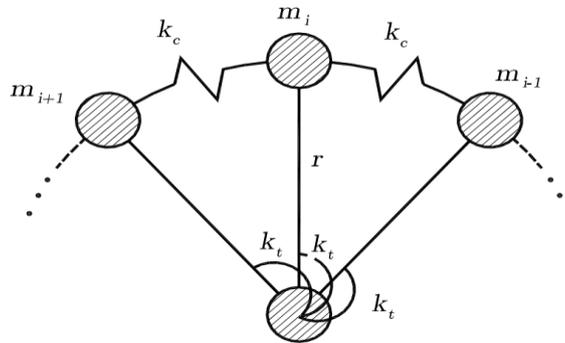


Рис. 3. Модель с торсионными пружинными элементами [16]

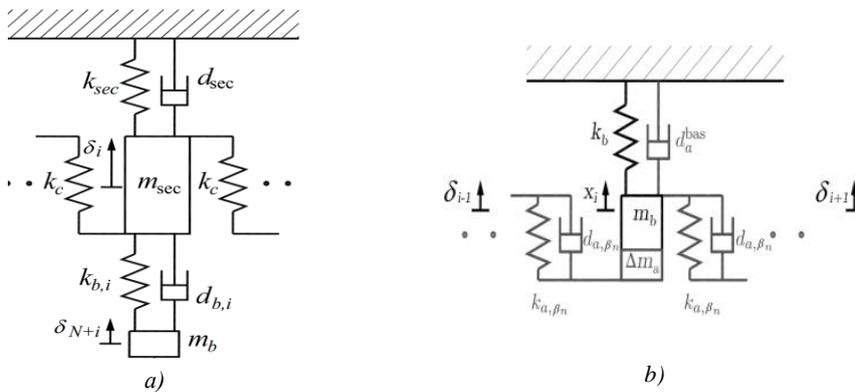


Рис. 4. Модель одного сектора: а — без дополнительной массы; б — с дополнительной массой

Матрица масс определяется как:

$$M = \begin{bmatrix} m_{sec} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{sec} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & m_{sec} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_b & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & m_b & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & m_b \end{bmatrix}.$$

Матрица демпфирования:

$$D = \begin{bmatrix} d_{\text{sec}+d_{b,1}} & \dots & \dots & 0 & 0 & -d_{b,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{\text{sec}+d_{b,2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & -d_{b,2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & d_{\text{sec}+d_{b,N-1}} & 0 & 0 & \dots & \dots & -d_{b,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{\text{sec}+d_{b,N}} & 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{b,N} \\ -d_{b,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & d_{b,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -d_{b,2} & \dots & \dots & 0 & 0 & d_{b,2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -d_{b,N-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & d_{b,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{b,N} & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{b,N} \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости:

$$K = \begin{bmatrix} k_1^* & -k_c & 0 & \dots & 0 & -k_c & -k_{b,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_c & k_2^* & -k_c & \dots & \dots & 0 & 0 & -k_{b,2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -k_c & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -k_c & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -k_c & k_{N-1}^* & -k_c & 0 & \dots & \dots & \dots & -k_{b,N-1} & 0 \\ -k_c & 0 & \dots & 0 & -k_c & k_N^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{b,N} \\ -k_{b,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{b,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_{b,2} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & k_{b,2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -k_{b,N-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & k_{b,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{b,N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{b,N} \end{bmatrix},$$

где  $k_{\text{sec}}^* = k_{\text{sec}} + 2k_c + k_{b,i}$ .

**Результаты исследований.** Авторы использовали результаты эксперимента, проведенного в Бранденбургском техническом университете (БТУ) и описанного в работе [20]. На рис. 6 показано реальное колесо компрессора с 29 лопатками, подготовленное для проведения эксперимента. Расстройка имитировалась путем присоединения дополнительных масс к периферии лопаток.



Рис. 5. Реальное рабочее колесо с дополнительными массами

На первом этапе были рассчитаны собственные колебания колеса без расстройки, полученные традицион-

ным способом с помощью МКЭ. При этом колесо рассматривалось как идеальная циклически симметричная конструкция. На рис. 7 представлены первые три формы собственных колебаний колеса без расстройки.



Рис. 6. Формы собственных колебаний рабочего колеса без расстройки

Далее были рассмотрены три случая с разными распределениями дополнительных масс по периферии рабочего колеса:

- 1) дополнительные массы по 0.00211 кг присоединялись к 28 из 29 лопаток;

2) дополнительные массы по 0.005 кг присоединялись к 28 из 29 лопаток;

3) дополнительные массы присоединялись к лопаткам в соответствии с порядком, представленным в табл. 1.

В табл. 2 представлены результаты расчетов МКЭ вышеперечисленных вариантов внесения расстройки в сравнении с результатами эксперимента.

**Таблица 1.** Присоединение дополнительных масс к лопаткам

Номер лопатки	$\Delta m, кг$	Номер лопатки	$\Delta m, кг$	Номер лопатки	$\Delta m, кг$
1	0.001251440	11	0.001451640	21	0.001356856
2	0.001302147	12	0.001302100	22	0.001125158
3	0.000025486	13	0.000065488	23	0.000085489
4	0.001102156	14	0.001502634	24	0.001402132
5	0.001305234	15	0.001600680	25	0.001202183
6	0.001205214	16	0.001166480	26	0.001102121
7	0.000802923	17	0.000735542	27	0.001302524
8	0.001100598	18	0.001553548	28	0.000356542
9	0.001302003	19	0.001135789	29	0.001205558
10	0.001202100	20	0.001257365		

**Таблица 2.** Сравнение результатов расчета с экспериментом

Форма колебаний	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
	Собственные частоты, Гц					
	МКЭ	Эксперимент (БТУ)	МКЭ	Эксперимент (БТУ)	МКЭ	Эксперимент (БТУ)
1	403.3854	397.8125	410.3864	402.9375	416.3864	403.8574
2	1296.5417	1 261.0000	1 300.2214	1 252.6875	1 304.5584	1 255.0780
3	1803.3784	1 766.3125	1 826.6854	1 765.6750	1 843.3258	1 766.0640

**Заключение.** Результаты исследований показали адекватность и хорошую точность примененной пружинно-массово-демпферной модели в сравнении с экспериментом в случае свободных колебаний. Требуемый объем оперативной памяти при применении пружинно-массово-демпферной модели в данной работе не оценивался. Однако очевидно, что объем компьютер-

ной памяти в случае использования пружинно-массово-демпферной модели колеса, каждый сектор которой содержит всего две степени свободы, по сравнению с традиционной конечно-элементной моделью, сектор которой (в зависимости от плотности конечно-элементной сетки) содержит сотни степеней свободы, может быть на порядки меньше.

#### Литература

1. Irretier H. «Spectral Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies by Component Mode Synthesis», *Vibrations of Bladed Disk Assemblies*, edited by D.J. Ewins and A.V. Srinivasan, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1983. P. 115–125.
2. Заинчковский К.С., Репецкий О.В., Лопатин А.Б., Маликов В.Ф., Ольшевский А.Г., Персиянов В.В., Рыжиков И.Н. Автоматизация прочностных расчетов турбомашин / под ред. О.В. Репецкого. Иркутск, 1990. 100 с.
3. Рыжиков И.Н. К оценке долговечности роторов газотурбинных двигателей // *Авиационное машиностроение и транспорт Сибири: сб. ст. VI Всерос. науч.-практической конф.* (26-27 фев. 2016 г.). Иркутск: Изд-во ИРНТУ, 2016. С. 288–294.
4. Репецкий О.В., Рыжиков И.Н., Шмидт Р. Исследования влияния различных видов расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин // *Вестн. Байкальского союза стипендиатов DAAD (Байкальский гос. ун-т экономики и права)*. 2010. № 1. С. 20–31.
5. Repetskiy O., Ryjikov I. Modeling and simulation of dynamic processes with help of program package BLADIS+ // *Innovations and Advanced Techniques in Systems, Computing Sciences and Software Engineering*, 2008. P. 219–220.
6. Repetski O., Ryjikov I., Springer H. Numerical analysis of rotating flexible blade-disk-shaft systems // *Proceedings of the ASME Turbo Expo, Indianapolis, Indiana June 7–10, 1999*, 99-GT-317, V004T03A034. 8 p.
7. Bladh J.R., Castanier M.P., Pierre C. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned Bladed Disks - Part I: Theoretical Models // *Journal of Engineering for Gas turbines and Power*. January 2001. V. 123. № 8. P. 89–99.
8. Ewins D.J., Han Z.S. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk // *Trans. ASME, Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design*. 1984. V. 106. P. 211–217.
9. Beirow B., Figaschewsky F., Kühhorn A., Bornhorn A. «Modal Analyses of an Axial Turbine Blisk with Intentional Mistuning», *J Eng Gas Turb* 2018, Power 140 (1): 012503-012503-11.
10. Figaschewsky F., Kühhorn A. Analysis of Mistuned Blade Vibrations Based on Normally Distributed Blade Individual Natural Frequencies. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2015, GT2015-43121, 13–19 June 2015, Montréal, Canada*, 2015.
11. Wagner J.T. Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor // *Trans. ASME, Journal of Engineering for Power*. 1967. V. 89. P. 502–513.
12. Repetckii O., Nguyen Tien Quyet, Ryzhikov I. Investigation of vibration and fatigue life of mistuned bladed disks // *Proceedings of the International Conference «Actual Issues of Mechanical Engineering» (AIME 2017), Tomsk, Russia*, 27–

29 July, 2017. V. 133. P. 702–707.

13. Wagner M.B., Younan A., Allaire P., Cogill R. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review // *International journal of rotating machinery*. 2010. 17 p.
14. Sinha A. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly // *Journal AIAA*. 1986. V. 24. P. 1797–1801.
15. Репецкий О.В., До Мань Тунг. Анализ влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес турбомашин на основе пружинно-массовой модели // *Вестн. Иркутского гос. технического ун-та*. 2013. № 10 (81). С. 56–63.
16. Happawana G.S., Nwokah O.D.I., Bajaj A.R., Azene M. Free and forced response of mistuned linear cyclic systems: a singular perturbation approach // *Journal of Sound and Vibration*. 1998. № 211. P. 761–789.
17. Griffin J.H., Hoosac T.M. Model development and statistical investigation of Turbine blade mistuning // *Trans. ASME, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. 1984. V. 106. P. 204–210.
18. Griffin J.H., Sinha A. The interaction between mistuning and friction in the forced Response of Bladed Disk Assemblies // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1985. V. 107. P. 205–211.
19. Pierre C., Murthy D.V. Aeroelastic modal characteristics of Mistuned bladed assemblies: Mode localization and loss of eigenstructure // *Journal AIAA*. 1989. 91-1218-CP. P. 2036–2050.
20. Beirow B. *Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise*. Cottbus, 2009. 172 p.

#### References

1. Irretier H. «Spectral Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies by Component Mode Synthesis», *Vibrations of Bladed Disk Assemblies*, edited by D.J. Ewins and A.V. Srinivasan, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1983. P. 115–125.
2. Zainchkovskij K.S., Repeckij O.V., Lopatin A.B., Malikov V.F., Ol'shevskij A.G., Persiyarov V.V., Ryzhikov I.N. *Automation of strength calculations for turbomachines / pod red. O.V. Repeckogo*. Irkutsk, 1990. 100 p.
3. Ryzhikov I.N. Towards an assessment of the fatigue life of gas turbine engine rotors // *Aviamashinostroenie i transport Sibiri: sb. st. VI Vseros. nauch.-prakticheskoy konf. (26–27 fev. 2016 g.)*. Irkutsk: Izd-vo IRNITU, 2016. P. 288-294.
4. Repeckij O.V., Ryzhikov I.N., SHmidt R. Studies of the influence of various types of mistuning on vibrations and fatigue life of turbomachine impellers // *Vestn. Bajkal'skogo soyuza stipendiatov DAAD (Bajkal'skij gos. un-t ekonomiki i prava)*. 2010. № 1. P. 20–31.
5. Repetskiy O., Ryjikov I. Modeling and simulation of dynamic processes with help of program package BLADIS+ // *Innovations and Advanced Techniques in Systems, Computing Sciences and Software Engineering*, 2008. P. 219, 220.
6. Repetski O., Ryjikov I., Springer H. Numerical analysis of rotating flexible blade-disk-shaft systems // *Proceedings of the ASME Turbo Expo, Indianapolis, Indiana June 7–10, 1999, 99-GT-317, V004T03A034*. 8 p.
7. Bladh J.R., Castanier M.P., Pierre C. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned bladed Disks - Part I: Theoretical Models // *Journal of Engineering for Gas turbines and Power*. January 2001. V. 123. № 8. P. 89–99.
8. Ewins D.J., Han Z.S. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk // *Trans. ASME, Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design*. 1984. V. 106. P. 211–217.
9. Beirow B., Figaschewsky F., Kühhorn A., Bornhorn A. «Modal Analyses of an Axial Turbine Blisk with Intentional Mistuning», *J Eng Gas Turb* 2018, Power 140 (1): 012503-012503-11.
10. Figaschewsky F., Kühhorn A. Analysis of Mistuned Blade Vibrations Based on Normally Distributed Blade Individual Natural Frequencies. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2015, GT2015-43121, 13–19 June 2015, Montréal, Canada, 2015*.
11. Wagner J.T. Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor // *Trans. ASME, Journal of Engineering for Power*. 1967. V. 89. P. 502–513.
12. Repeckii O., Nguyen Tien Quyet, Ryzhikov I. Investigation of vibration and fatigue life of mistuned bladed disks // *Proceedings of the International Conference «Actual Issues of Mechanical Engineering» (AIME 2017), Tomsk, Russia, 27–29 July, 2017. V. 133. P. 702–707*.
13. Wagner M.B., Younan A., Allaire R., Cogill R. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review // *International journal of rotating machinery*. 2010. 17 p.
14. Sinha A. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly // *Journal AIAA*. 1986. V. 24. P. 1797–1801.
15. Repeckij O.V., Do Man' Tung. Analysis of the effect of mistuning on vibrations of turbomachine impellers based on the spring-mass model // *Bulletin of Irkutsk State Technical University*. 2013. № 10 (81). P. 56–63.
16. Happawana G.S., Nwokah O.D.I., Bajaj A.R., Azene M. Free and forced response of mistuned linear cyclic systems: a singular perturbation approach // *Journal of Sound and Vibration*. 1998. № 211. P. 761–789.
17. Griffin J.H., Hoosac T.M. Model development and statistical investigation of Turbine blade mistuning // *Trans. ASME, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. 1984. V. 106. P. 204–210.
18. Griffin J.H., Sinha A. The interaction between mistuning and friction in the forced Response of Bladed Disk Assemblies // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1985. V. 107. P. 205–211.
19. Pierre C., Murthy D.V. Aeroelastic modal characteristics of Mistuned bladed assemblies: Mode localization and loss of eigenstructure // *Journal AIAA*. 1989. 91-1218-CP. P. 2036–2050.
20. Beirow B. *Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise*. Sottbus, 2009. 172 p.