

Экспонента кривой разгрузки предварительно нагруженной сферы плоской жесткой поверхностью

П.М. Огар^a, Е.В. Угрюмова^b, Д.О. Федорович^c

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

^a ogar@brstu.ru, ^b hellensh@yandex.ru, ^c wal-500@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>,

^c <https://orcid.org/0000-0002-2135-7848>

Статья поступила 15.08.2020, принята 22.09.2020

Для исследования сплющивания сферы предложено использовать диаграмму кинетического индентирования плоскостью. При известных значениях приведенного модуля упругости, площади контакта, максимальной и остаточной деформации представляется возможность определить приложенное усилие. Указано, что в этой связи важную роль приобретает значение экспоненты кривой разгрузки предварительно нагруженной сферы плоской жесткой поверхностью. Произведен анализ методик определения экспонент кривых разгрузки для конечно-элементных моделей, учитывающих деформационное упрочнение. Показано, что зависимости экспонент кривых разгрузки при сплющивании от относительного внедрения по форме и диапазону значений значительно отличаются от аналогичных при внедрении сферы. Исследования проводились по следующим направлениям: сравнивались «обновленные» параметры конечно-элементных моделей сплющивания сферы с расчетными — силы в контакте и экспоненты кривых разгрузки; определялась связь между экспонентами разгрузки для силы и площади; определялась экспонента кривой разгрузки при сплющивании сферического сегмента со свойства полупространства. Получено хорошее совпадение зависимостей безразмерной нагрузки от относительного перемещения. Установлена зависимость между экспонентами кривых разгрузки для силы и для площади. Указано, что использование полусферы при конечно-элементном моделировании сплющивания неровностей шероховатой поверхности не является удачным вариантом. Перспективной является модель неровности в виде сферического сегмента на цилиндрическом основании, действующем как полубесконечное твердое тело.

Ключевые слова: сплющивание сферы; упругопластический контакт; сферическая неровность; экспонента кривой разгрузки; деформационное упрочнение.

The exponent of the unloading curve of a preloaded sphere by a flat rigid surface

P.M. Ogar^a, E.V. Ugryumova^b, D.O. Fedorovich^c

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^a ogar@brstu.ru, ^b hellensh@yandex.ru, ^c wal-500@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>,

^c <https://orcid.org/0000-0002-2135-7848>

Received 15.08.2020, accepted 22.09.2020

To study the flattening of a sphere, it is proposed to use the diagram of kinetic indentation by a plane. With known values of the reduced modulus of elasticity, contact area, maximum and residual deformation, it is possible to determine the applied force. It is indicated that in this regard, the exponent of the unloading curve of a pre-loaded sphere with a flat rigid surface takes an important role. The analysis of methods for determining the exponential of unloading curves for finite element models, taking into account strain hardening, is carried out. It is shown that the dependences of the exponents of the unloading curves during flattening on the relative indentation in the shape and range of values significantly differ from those for the indentation of the sphere. Investigations are carried out in the following directions: the "updated" parameters of the finite element models of flattening of the sphere are compared with the calculated ones - the forces in contact and the exponent of the unloading curves; the relationship between the exponents of unloading for force and area is determined; the exponent of the unloading curve is defined for flattening a spherical segment with the properties of a half-space. An adequate agreement is obtained for the dependences of the dimensionless load on the relative displacement. The relationship between the exponents of the unloading curves for the force and for the area is established. It is indicated that the use of a hemisphere in finite element modeling of flattening of rough surface irregularities is not a good option. A promising model is an asperity in the form of a spherical segment on a cylindrical base, acting as a semi-infinite rigid body.

Keywords: flattening the sphere; elastoplastic contact; spherical unevenness; unloading curve exponent; strain hardening.

Введение. Определение контактных характеристик в стыке шероховатых поверхностей представляет сложную задачу как с точки зрения описания шероховатых поверхностей, так и с точки зрения механики контакта отдельных неровностей. Поэтому при решении таких задач обычно используются различные методы математического моделирования, что подразумевает различные модели шероховатых поверхностей: статистическую, дискретную, фрактальную, фрактально-дискретную и др. [1–4]. Все указанные модели предполагают контакт эквивалентной шероховатой и гладкой поверхностей. Как следует из работы [1], шероховатую поверхность можно представить в виде набора тел правильной геометрической формы (стержней, конусов, пирамид, сфер, эллипсоидов), для которых известно решение контактных задач. При этом их распределение по высоте в шероховатом слое должно соответствовать кривой опорной поверхности. Оптимальной считается сферическая модель отдельной неровности.

При контакте сферы с плоской поверхностью, в зависимости от соотношения механических свойств, возможно внедрение и сплющивание сферы. В большинстве случаев контакт является упругопластическим. Результаты исследований упругопластических контактов сферы и плоскости приведены в работах [5; 6], в которых указано на отсутствие замкнутого решения. Исключение составляют инженерные методы для внедрения сферы, представленные в работах [7; 8], имеющих экспериментальное подтверждение, и не вошедших в обзор работ [5; 6].

Сложность задачи привела к созданию конечно-элементных моделей (КЭМ) контакта сферы и плоскости. Для упрощения конечно-элементных решений задач упругопластичности используются математические модели описания истинных кривых «напряжение – деформация». Наиболее часто используется упругопластическое тело Холломона [9–12 и др.], для которого:

$$S = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y, \quad \sigma \leq \sigma_y \\ E\varepsilon_y^{1-n} \varepsilon^n, & \varepsilon > \varepsilon_y, \quad \sigma > \sigma_y \end{cases}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_y = S_y/E$; $S_y \approx \sigma_y$; S_y и σ_y — истинный и условный пределы текучести; ε — деформация; E — модуль упругости; n — экспонента упрочнения.

В работе [13] приведен инженерный метод расчета контактных характеристик при сплющивании сферы путем модернизации модели Дрозда – Матлина [7; 14], основанной на понятии «пластическая твердость». При этом были использованы результаты КЭ моделирования для определения остаточной деформации при сплющивании сферы. Для определения площади контакта был исполь-

зован метод кинетического индентирования, предложенный С.И. Булычевым [15] для определения модуля упругости материала. На рис. 1 представлена типовая диаграмма кинетического индентирования, которая обычно представляется в координатах $P-h$ или $P-\bar{h}$, где P — нагрузка; $\bar{h} = h/R$ — относительное внедрение индентора.

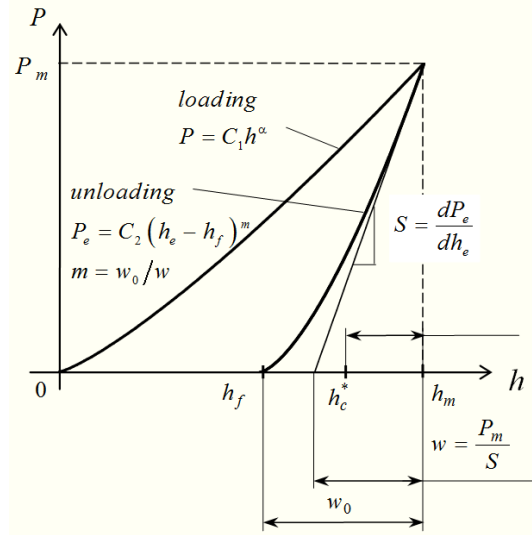


Рис. 1. Схема диаграммы кинетического индентирования

С кривых «нагрузка – перемещение» снимаются четыре важных параметра: максимальная нагрузка P_m , максимальное внедрение h_m , контактная жесткость на начальном участке ветви разгрузки $S = dP_e/dh_e$, остаточная глубина h_f после разгрузки индентора. Кривую нагружения можно описать выражениями:

$$P = P_m h_m^{-\alpha} h^\alpha = P_m \bar{h}_m^{-\alpha} \bar{h}^\alpha = C_1 \bar{h}^\alpha, \quad (2)$$

а кривую разгрузки:

$$P_e = P_m \left(\frac{h_e - h_f}{h_m - h_f} \right)^m = P_m \left(\frac{\bar{h}_e - \bar{h}_f}{\bar{h}_m - \bar{h}_f} \right)^m, \quad (3)$$

где $C_1 = P_m \bar{h}_m^{-\alpha}$; $\bar{h}_m = h_m/R$; R — радиус сферы; $\alpha = 1...1.5$, $m = 1.2...1.5$ — экспоненты.

Метод базируется на уравнении для контактной жесткости начального участка кривой разгрузки:

$$S = \frac{dP_e}{dh_e} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^* \sqrt{A}, \quad (4)$$

где A — проекция площади контакта; E^* — приведенный модуль упругости.

С учетом выражения (3) имеем:

$$\frac{P_m m}{h_m - h_f} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^* \sqrt{A}. \quad (5)$$

При известных значениях приведенного модуля упругости, площади контакта, максимальной и остаточной деформации представляется возможность определить приложенное усилие. В этой связи важ-

ную роль приобретает значение экспоненты кривой разгрузки предварительно нагруженной сферы плоской жесткой поверхностью, уточнение значений которой является целью настоящей работы.

Разработанность темы. Как следует из рис. 3, при кинетическом индентировании экспонента кривой разгрузки определяется отношением:

$$m = \frac{w_0}{w}, \quad (6)$$

где $w = P_m/S$.

По данным [16], согласно концепции «эффективной формы индентора» значение экспоненты кривой разгрузки ожидаемо в диапазоне 1,2...1,5, что подтверждается приведенными экспериментальными значениями. В работе [8] параметр m определен расчетным путем с использованием результатов конечно-элементного анализа:

$$m = \frac{3 - 2c^2\bar{h}}{2 - c^2\bar{h}}, \quad (7)$$

где $c^2 = h_c/h = c^2(\varepsilon_y, n, \bar{h})$ определяется согласно [9]; h_c — контактная глубина.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости экспоненты кривой разгрузки от относительного внедрения жесткой сферы для разных значений ε_y и n . Как следует из рис. 2 а, с ростом упругих свойств материала (значений n и ε_y) значение экспоненты кривой увеличивается. Для относительного внедрения $\bar{h} = 0 \dots 0.2$, характерного для трибомеханики шероховатых поверхностей, значения экспоненты кривой разгрузки находятся в пределах 1,426...1,5.

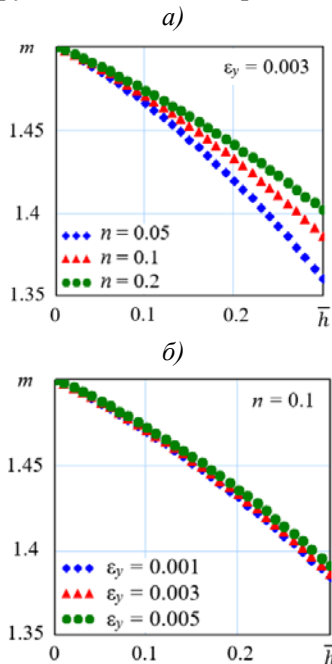


Рис. 2. Зависимости $m - \bar{h}$ при фиксированных значениях ε_y (а) и при фиксированных значениях n (б)

На рис. 2 б представлены зависимости экспоненты кривой разгрузки от относительного внедрения жесткой сферы при фиксированных значениях n для разных значений ε_y . В этом случае диапазон разброса значений m значительно уже, чем в предыдущем случае.

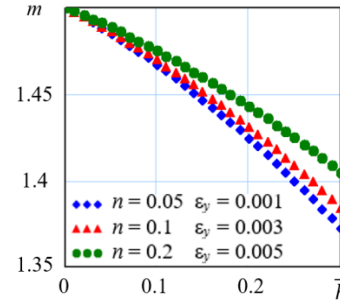


Рис. 3. Зависимости $m - \bar{h}$ для материалов с возрастающими упругими свойствами

Для КЭМ сплющивания сферы, учитывающих деформационное упрочнение [11; 12], кривая разгрузки описывается выражением, аналогичным выражению (3) при внедрении сферы:

$$P_e = P_m \left(\frac{w_e - w_{res}}{w_m - w_{res}} \right)^{m_p} = P_m \left(\frac{\bar{w}_e - \bar{w}_{res}}{\bar{w}_m - \bar{w}_{res}} \right)^{m_p}, \quad (8)$$

где $\bar{w}_m = w_m/R$; w_{res} — остаточное перемещение при разгрузке сферы (аналог h_f) определяется выражением:

$$\frac{w_{res}}{w_m} = \left(1 - (\omega_m^*)^{-d} \right)^2; \quad (9)$$

экспонента кривой разгрузки :

$$m_p = 1.5 \cdot (\omega_m^*)^{e_p}; \quad (10)$$

где для КЭМ [11]:

$$e_p = e_p(n) = 0.07071n^2 - 0.0411n - 0.02955, \quad (11)$$

$$d = d(n) = -0.22471n^2 - 0.17406n + 0.39877; \quad (12)$$

для КЭМ [12]:

$$e_p = e_p(n, v) = 0.0519n^2 + 0.0705nv - 0.0401n - 0.0718v - 0.00596, \quad (13)$$

$$d = d(n, v) = -0.114n^2 - 0.237n + 0.219v + 0.331; \quad (14)$$

здесь n — экспонента упрочнения; v — коэффициент Пуассона; $w_m^* = w_m/w_c$, w_c — критическое перемещение, при котором начинается пластическая деформация.

На рис. 4 и 5 представлены зависимости экспоненты кривой разгрузки от относительного перемещения после сплющивания сферы жесткой поверхностью.

Для относительного сплющивания $\bar{w} = 0..0.2$ значения экспоненты кривой разгрузки m_p находятся в пределах 1.045...1.5, что значительно отличается от аналогичного диапазона при внедрении сферы. Резкий спад значений m_p происходит в диапазоне $0 \leq \bar{w} \leq 0.005$.

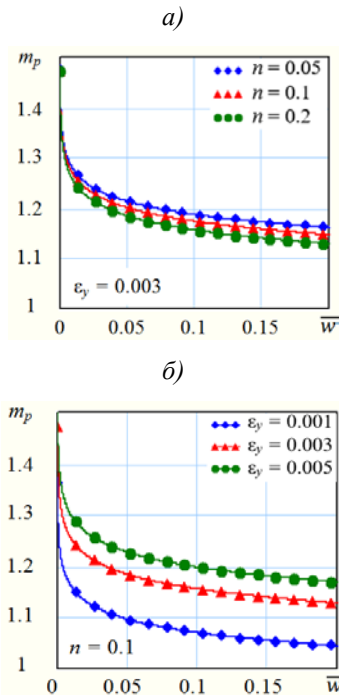


Рис. 4. Зависимости $m_p - \bar{w}$ при фиксированных значениях ϵ_y (а) и при фиксированных значениях n (б) для КЭМ [11]

При сплющивании сферических неровностей зависимости $m_p - \bar{w}$ являются вогнутыми, тогда как при внедрении сферических неровностей — выпуклыми. Кроме того, на рис. 4 а получены некорректные результаты — для более пластичных материалов значения m_p больше, чем для более упругих.

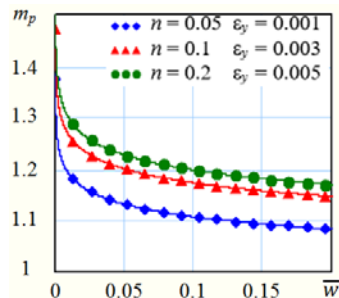


Рис. 5. Зависимости $m_p - \bar{w}$ для материалов с возрастающими упругими свойствами для КЭМ [11]

Похожие результаты для КЭМ [12] представлены на рис. 6 и 7, на которых значения экспоненты кривой разгрузки m_p находятся в пределах 1.11...1.5.

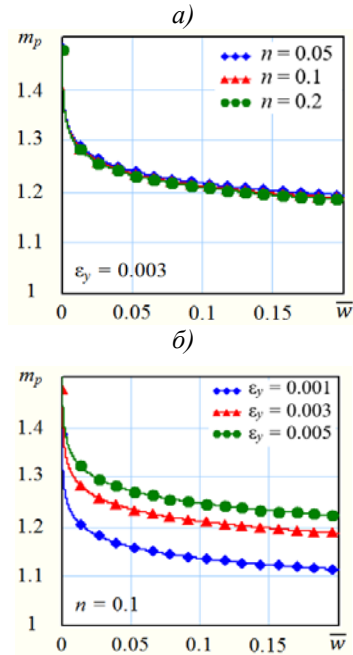


Рис. 6. Зависимости $m_p - \bar{w}$ при фиксированных значениях ϵ_y (а) и при фиксированных значениях n (б) для КЭМ [12]

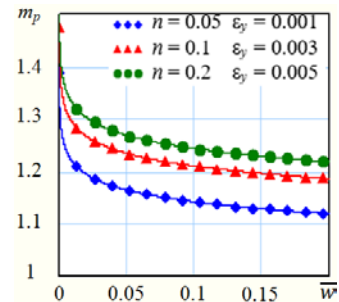


Рис. 7. Зависимости $m_p - \bar{w}$ для материалов с возрастающими упругими свойствами для КЭМ [12]

Близкие результаты по определению площадей контакта при внедрении и сплющивании сферических неровностей, полученные в работе [17], предполагают близкие значения экспонент кривых разгрузки при внедрении и сплющивании, что исходит из анализа выражения (3).

Вышеприведенный анализ предполагает дополнительные исследования КЭМ [11; 12].

Методология исследований. Исследования проводились по следующим направлениям: сравнивались «обновленные» параметры КЭМ сплющивания с расчетными — силы в контакте и экспоненты кривых разгрузки; определялась связь между экспонентами разгрузки для силы и площади; определялась экспонента кривой разгрузки при сплющивании сферического сегмента со свойства полупространства.

Приведем выражения для силы и площади контакта КЭМ [11]:

$$\frac{P}{P_c} = B_i \left(\frac{w_m}{w_c} \right)^{\gamma_i} = B_i (w_m^*)^{\gamma_i}, \quad (15)$$

$$\frac{A}{A_c} = C_i \left(\frac{w_m}{w_c} \right)^{\lambda_i} = C_i (w_m^*)^{\lambda_i}, \quad (16)$$

где $B_i = B_i(n)$, $\gamma_i = \gamma_i(n)$, $C_i = C_i(n)$, $\lambda_i = \lambda_i(n)$ — параметры, которые зависят от экспоненты упрочнения n для разных диапазонов w^* ; w_c , P_c и A_c — критические значения параметров, соответствующих началу пластической деформации.

Критическое перемещение [11]:

$$w_c = \left(\frac{\pi K H}{2 E^*} \right)^2 R, \quad (17)$$

где $H = 2.8 S_y$ — твердость [18]; $K = 0.454 + 0.41 v$ — параметр, зависящий от коэффициента Пуассона v ; E^* — приведенный модуль упругости;

$$P_c = 4 E^* R^{1/2} w_c^{3/2} / 3, \quad A_c = \pi R w_c. \quad (18)$$

Из выражения (5) с учетом (9) – (12) и (16) следует:

$$\bar{P}_a = \bar{P}_c C_i^{0.5} (w^*)^{1+0.5\lambda_i - e_p} \left[2(w^*)^{-d} - (w^*)^{-2d} \right], \quad (19)$$

где $\bar{P} = \frac{P}{E^* R^2}$.

На рис. 8 представлены зависимости $\bar{P} - \bar{w}$, рассчитанные по выражениям (19) и (15), из которых следует хорошее совпадение.

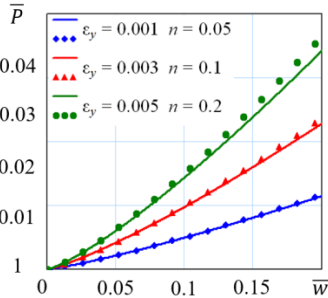


Рис. 8. Зависимости относительного усилия от относительного перемещения. Точки соответствуют выражению (19), линии — выражению (15)

С другой стороны, из выражения (5) представляется возможность определить экспоненту кривой разгрузки:

$$m_p = \frac{3 \cdot C_i^{0.5} (w^*)^{1+0.5\lambda_i - e_p} \left[2(w^*)^{-d} - (w^*)^{-2d} \right]}{2 \cdot B_i}. \quad (20)$$

На рис. 9 приведены результаты расчетов экспонент кривой разгрузки по выражению (20), полученному из выражения (19). Несмотря на хорошее совпадение усилий на рис. 8, разброс значений экспонент, рассчитанных разными методами,

с ростом относительного перемещения увеличивается. Кроме этого, имеется некорректный результат — значение экспоненты более упругого материала меньше, чем для менее упругого.

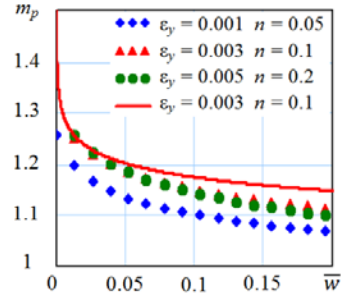


Рис. 9. Зависимости $m_p - \bar{w}$. Точки — выражение (20), линия — выражение (10)

Рассмотрим взаимосвязь между экспонентами кривых разгрузок для силы и площади. Аналогично выражению (8) имеем:

$$A_e = A_m \left(\frac{w_e - w_{res}}{w_m - w_{res}} \right)^{m_a}. \quad (21)$$

При повторном нагружении разгруженной сферы величина перемещения [3]:

$$w_0 = w_e - w_{res} = \frac{PK_{\beta 0}}{\pi a E^*}, \quad (22)$$

где $a = (A/\pi)^{0.5}$ — радиус площадки контакта.

Из выражения (22) с учетом (21) получим:

$$P_e = K_w (w_e - w_{res})^{1+0.5m_a}, \quad (23)$$

$$\text{где } K_w = \frac{\pi E^*}{K_{\beta 0}} \left(\frac{A_m}{\pi (w_e - w_{res})^{m_a}} \right)^{0.5}.$$

Дифференцируем выражение (23):

$$\frac{dP_e}{dw_e} = K_w (1 + 0.5m_a) (w_e - w_{res})^{0.5m_a}. \quad (24)$$

Тогда:

$$m_p = \frac{w_e - w_{res}}{P_e} \cdot \frac{dP_e}{dw_e} = 1 + 0.5m_a. \quad (25)$$

На рис. 10 показано сравнение зависимостей, рассчитанных по выражениям (10) и (25).

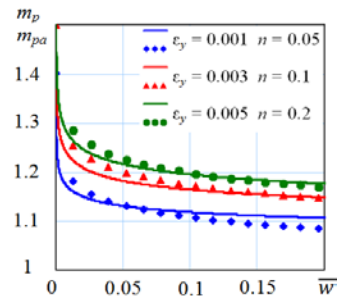


Рис. 10. Зависимости экспонент кривой разгрузки от относительного перемещения. Точки — выражение (10), линия — выражение (25)

Введем параметр C^a (аналог $C^2 = h_c/h$ при внедрении сферы):

$$C^a = \frac{A(w)}{A'(w)}, \quad (26)$$

где $A(w)$ — площадь контакта, определяется выражением (16); $A'(w)$ — площадь сечения сферы на уровне w ;

$$A'(w) = \pi(2Rw - w^2). \quad (27)$$

Тогда:

$$C^a = \frac{A(w)}{A'(w)} = \frac{\pi R w^* C_i (w^*)^{\lambda_i}}{\pi R w (2 - \bar{w})} = \frac{C_i (w^*)^{\lambda_i - 1}}{2 - \bar{w}} \quad (28)$$

По аналогии с выражением (7) получаем:

$$m_p = \frac{3 - 2C^a}{2 - C^a}. \quad (29)$$

Такой подход возможен, когда сферический сегмент находится на полупространстве с таким же материалом. В работе [19] указано, что если представить отдельную неровность в виде сферического сегмента с диаметром основания $2a$, который находится на цилиндрическом основании, то основание будет действовать как полубесконечное твердое тело, когда его высота превысит $6a$. Поэтому корректное использование результатов конечно-элементного анализа при сплющивании возможно для $a/R < 0.17$.

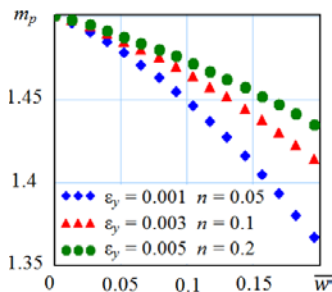


Рис. 11. Зависимости экспонент кривой разгрузки от относительного перемещения при сплющивании сферического сегмента, имеющего свойства полупространства

На рис. 11 представлены зависимости $m_p - \bar{w}$, рассчитанные по выражению (29), которые являются выпуклыми. Диапазон значений экспонент кривой разгрузки близок к аналогичному диапазону при внедрении сферы.

Заключение.

1. Для исследования сплющивания сферы предложено использовать диаграмму кинетического индентирования плоскостью. При известных

значениях приведенного модуля упругости, площади контакта, максимальной и остаточной деформации представляется возможность определить приложенное усилие. В этой связи важную роль приобретает значение экспоненты кривой разгрузки предварительно нагруженной сферы плоской жесткой поверхностью.

2. Произведен анализ методик определения экспонент кривых разгрузки для конечно-элементных моделей, учитывающих деформационное упрочнение. Показано, что зависимости экспонент кривых разгрузки при сплющивании от относительного внедрения по форме и диапазону значений значительно отличаются от аналогичных при внедрении сферы.

При этом получены некорректные результаты — для более пластичных материалов значения m_p больше, чем для более упругих.

3. Исследования проводились по следующим направлениям: сравнивались «обновленные» параметры КЭМ сплющивания сферы с расчетными — силы в контакте и экспоненты кривых разгрузки; определялась связь между экспонентами разгрузки для силы и площади; определялась экспонента кривой разгрузки при сплющивании сферического сегмента со свойства полупространства.

4. Получено хорошее совпадение зависимостей $\bar{P} - \bar{w}$, рассчитанных по выражениям (19) и (15). Несмотря на это разброс значений экспонент, рассчитанных разными методами с ростом относительного перемещения увеличивается.

Установлена зависимость между экспонентами кривых разгрузки для силы и для площади.

Для определения экспоненты кривой разгрузки при сплющивании сферического сегмента со свойства полупространства введен параметр C^a (аналог C^a при внедрении сферы.)

5. Использование полусферы при конечно-элементном моделировании сплющивания неровностей шероховатой поверхности не является удачным вариантом, так как неровностей, высота которых равна радиусу, не бывает. Средний угол наклона у неровностей шероховатой поверхности — несколько градусов. Корректное использование результатов конечно-элементного анализа полусферы для шероховатых поверхностей возможно для $a/R < 0.17$. Перспективной является модель неровности в виде сферического сегмента на цилиндрическом основании, действующем как полубесконечное твердое тело [19].

Литература

1. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
2. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы рас-

- четов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
3. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: БрГУ, 2017. 242 с.

4. Горохов Д.Б. Разработка методов расчета контактного взаимодействия шероховатых поверхностей в неподвижных уплотнительных соединениях: дис. ... д-ра техн. наук. Братск, 2018. 273 с.
5. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghithu D.B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology International*. 2016. V. 93. P. 78–90.
6. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic-Plastic Contact Mechanics // *Applied Mechanics Reviews*. 2017. V. 69. p. 060804.
7. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 234 с.
8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Advanced Materials Research*. 2013. V. 664. P. 625–631.
9. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136–4153.
10. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Desing*. 2010. V. 31. P. 636–640.
11. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // *Int. J. of Mech. Sciences*. 2012. V. 56. P. 70–76.
12. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. V. 94. P. 20–26.
13. Ogar P., Ugryumova E., Gorokhov D., Zhuk A. Influence of the characteristics of hardenable material on elastoplastic flattening of spherical asperities // *Materials Today: Proceedings*. 2020. URL: doi.org/10.1016/j.matpr.2020.08.174.
14. Матлин М.М., Лебский С.Л., Мозгунова А.И. Закономерности упругопластического контакта в задачах поверхностного пластического упрочнения. М.: Машиностроение, 2007. 218 с.
15. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.
16. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials Research*. 2004. V. 19. № 1. P. 3–20.
17. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Indentation and flattening of rough surfaces spherical asperities // *International Journal of Engineering and Technology(UAE)*. 2018. V. 7. № 2.23. P. 188–191.
18. Tabor D. *The Hardness of Metals*. Clarendon Press. Oxford, 1951. 188 p.
19. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces*. 2019. URL: [10.1080/17515831.2019.1663396](https://doi.org/10.1080/17515831.2019.1663396).
2. Kragel'skij I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. *Basics of friction and wear calculations*. M.: Mashinostroenie, 1977. 526 p.
3. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: BrGU, 2017. 242 p.
4. Gorohov D.B. Development of methods for calculating the contact interaction of rough surfaces in fixed sealing joints: dis. ... d-ra tekhn. nauk. Bratsk, 2018. 273 p.
5. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghithu D.B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology International*. 2016. V. 93. P. 78–90.
6. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic-Plastic Contact Mechanics // *Applied Mechanics Reviews*. 2017. V. 69. P. 060804.
7. Droz M.S., Matlin M.M., Sidiyakin YU.I. Engineering calculations elastic-plastic deformation of the contact. M.: Mashinostroenie, 1986. 234 p.
8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Advanced Materials Research*. 2013. V. 664. P. 625–631.
9. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136–4153.
10. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Desing*. 2010. V. 31. P. 636–640.
11. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // *Int. J. of Mech. Sciences*. 2012. V. 56. P. 70–76.
12. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. V. 94. P. 20–26.
13. Ogar P., Ugryumova E., Gorokhov D., Zhuk A. Influence of the characteristics of hardenable material on elastoplastic flattening of spherical asperities // *Materials Today: Proceedings*. 2020. URL: doi.org/10.1016/j.matpr.2020.08.174.
14. Matlin M.M., Lebskij S.L., Mozgunova A.I. Regularities of Elastoplastic Contact in Problems of Surface Plastic Hardening. M.: Mashinostroenie, 2007. 218 p.
15. Bulychev S.I., Alekhin V.P. Testing of materials by continuous depression of an indenter. M.: Mashinostroenie, 1990. 224 p.
16. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials Research*. 2004. V. 19. № 1. P. 3–20.
17. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Indentation and flattening of rough surfaces spherical asperities // *International Journal of Engineering and Technology (UAE)*. 2018. V. 7. № 2.23. P. 188–191.
18. Tabor D. *The Hardness of Metals*. Clarendon Press. Oxford, 1951. 188 p.
19. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces*. 2019. URL: [10.1080/17515831.2019.1663396](https://doi.org/10.1080/17515831.2019.1663396).

References

1. Demkin N.B. *Contacting rough surfaces*. M.: Nauka, 1970. 227 p.