

Учет деформационного упрочнения при сплющивании сферических неровностей

П.М. Огар^a, Е.В. Угрюмова^b, В.А. Шилин^c

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

^a ogar@brstu.ru, ^b hellensh@yandex.ru, ^c wal-500@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>, ^c <https://orcid.org/0000-0002-8218-782X>

Статья поступила 30.04.2020, принята 20.05.2020

Рассмотрены вопросы о влиянии упрочняемости материала на сплющивание сферических неровностей. Показано, что безразмерные выражения для силы и площади контакта в конечно-элементных моделях сплющивания сферы были получены для очень узкого диапазона относительных перемещений, который в десятки раз меньше, чем для моделей внедрения. Произведен анализ аналитической модели Дрозда – Матлина, которая основана на понятии «пластическая твердость» и линейной зависимости остаточной деформации от приложенной нагрузки. Указано, что такой подход не учитывает деформационного упрочнения материала, а его применение для расчетов сплющивания сферы приводит к некорректным результатам. Для учета деформационного упрочнения пластическая твердость представлена через характеристики степенного закона упрочнения. Была произведена модернизация рассматриваемой модели и получены безразмерные выражения для относительной деформации в зависимости от степени нагружения и характеристик степенного закона упрочнения. При моделировании сплющивания сферы были использованы результаты конечно-элементного моделирования для определения остаточной деформации ввиду их одинаковых значений для разных моделей сплющивания, учитывающих деформационное упрочнение. Приводится сравнение разработанной модели с известными конечно-элементными моделями сплющивания для больших значений относительных перемещений при разных значениях характеристик степенного закона упрочнения.

Ключевые слова: упругопластический контакт; сферическая неровность; сплющивание сферы; деформационное упрочнение; контактные характеристики.

Flattening the spherical asperities accounting strain hardening

P.M. Ogar^a, E.V. Ugryumova^b, V.A. Shilin^c

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^a ogar@brstu.ru, ^b hellensh@yandex.ru, ^c wal-500@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>, ^c <https://orcid.org/0000-0002-8218-782X>

Received 30.04.2020, accepted 20.05.2020

The questions of the influence of the hardenability of the material on the flattening of spherical irregularities are considered. It is shown that dimensionless expressions for the force and contact area in finite element models of flattening the sphere were obtained for a very narrow range of relative displacements, which is ten times smaller than for the implantation models. The analysis of the Drozd-Matlin analytical model, which is based on the concept of "plastic hardness" and the linear dependence of the residual deformation on the applied load, has been carried out. It is indicated that this approach does not take into account the strain hardening of the material and its use for calculating the flattening of the sphere leads to incorrect results. To account for strain hardening, plastic hardness is represented through the characteristics of the power law of hardening. The model under consideration has been modernized and dimensionless expressions for the relative deformation have been obtained depending on the degree of loading and the characteristics of the power law of hardening. When modeling the flattening of the sphere, the results of finite element modeling were used to determine the residual strain in view of their identical values for different flattening models that take into account strain hardening. A comparison of the developed model with the known finite-element flattening models for large relative displacements for different values of the characteristics of the power law of hardening is shown.

Keywords: elastoplastic contact; spherical roughness; flattening of the sphere; strain hardening; contact characteristics.

Введение. Эксплуатационные свойства соединений деталей машин обеспечиваются приложением к стыку инженерных поверхностей сжимающих напряжений. Так, например, герметизирующая способность уплотнительного стыка оценивается безразмерным функционалом проницаемости, который зависит от относительной площади контакта, плотности зазоров в стыке и степени слияния отдельных пятен контакта [1; 2]. Контакт между

инженерными поверхностями дискретный, реальный контакт происходит только на отдельных неровностях. Расчет реальной площади контакта и других характеристик для всей поверхности является сложной задачей из-за разницы в радиусах и высотах неровностей. Для упрощения задачи предполагается, что шероховатая поверхность состоит из распределенных по высоте неровностей сферической формы с одинаковым радиусом.

Контакт двух шероховатых поверхностей может быть смоделирован как контакт эквивалентной шероховатой поверхности с гладкой плоскостью [3; 4]. Контакт отдельной неровности в большинстве случаев моделируют как контакт сферы и плоскости.

Подробный обзор аналитических, экспериментальных и численных исследований с целью моделирования и прогнозирования свойств контакта, таких как реальный радиус контакта, среднее давление (твердость) и сила контакта, приведен в работах [5; 6]. Когда сила контакта достигает критического значения, напряженное состояние начнет вызывать текучесть в приповерхностном слое и при дальнейшем повышении нагрузки на поверхности контакта. Из-за сложности процесса не было предложено замкнутого решения для упругопластических контактов. Модели контактов отдельной неровности разделяют на две основные группы [7]: модели внедрения и модели сплющивания.

Значительный вклад в развитие конечно-элементных (КЭ) моделей внедрения сферы внесли авторы работ [8–12]. Подробно их вклад описан в [1]. Аналогично в развитии КЭ моделей сплющивания сферы можно отметить работы [16–25]. Изначально большинство моделей внедрения [8–12] учитывают деформационное упрочнение материала, которое соответствует линейно-степенному закону:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_y, \quad \sigma \leq \sigma_y \\ E\varepsilon_y^{1-n} \varepsilon^n, & \varepsilon > \varepsilon_y, \quad \sigma > \sigma_y \end{cases}, \quad (1)$$

где σ — напряжение; ε — деформация; E — модуль упругости; $\varepsilon_y = \sigma_y/E$, σ_y — предел текучести; n — экспонента упрочнения.

Для описания указанных выше моделей сплющивания только в двух работах [21; 22] использован степенной закон деформационного упрочнения. Их отличительной характеристикой в сравнении с моделями внедрения является то, что безразмерные выражения для контактной нагрузки и площади контакта были получены путем наилучшей подгонки конечно-элементных результатов для диапазона $\omega^* \leq 120$, где $\omega^* = \omega/\omega_c$ — относительная деформация при сплющивании сферы; ω_c — критическая деформация. Например, для $\varepsilon_y = 0.003$ имеем $\omega_c/R = 0.0000576$, где R — радиус сферы. При $\omega^* = 120$ имеем $\omega/R = 0.0069$. Для моделей внедрения, например [10; 11], аналогичная величина $h/R \leq 0.4$, где h — величина внедрения.

Цель исследований — определение влияния характеристик упрочняемого материала на сплющивание сферической неровности до значений h/R , соизмеримых с величинами при внедрении, и определение пределов применения КЭ моделей сплющивания [21; 22], учитывающих деформационное упрочнение.

Методология исследований. Для внедрения сферы разработаны инженерные методы расчета упругопластической деформации (модель Дрозда – Матлина) с

использованием понятия пластической твердости и линейной зависимости глубины остаточной лунки от прилагаемой нагрузки [26] и на основе диаграммы кинетического индентирования материала [27], которые имеют экспериментальное подтверждение [15].

Рассмотрим суть методики [26], в которой замкнутое решение для упругопластического внедрения жесткой сферы имеет вид:

$$h = h_e + h_p, \quad (2)$$

$$h_e = \frac{h_0}{\sqrt[3]{1 + 2h_p/h_e}}, \quad (3)$$

$$h_p = \frac{P - P_0}{2\pi R \cdot HD}, \quad (4)$$

где h_0 — величина деформации, определяемая по теории Герца:

$$h_0 = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5)$$

P — приложенное усилие; P_0 — усилие, соответствующее появлению текучести материала; HD — пластическая твердость.

Используя соотношение теории Герца, определим выражение для критической нагрузки \bar{P}_y и соответствующей ей деформации \bar{h}_y [1]:

$$\bar{h}_y = h_y/R = (\pi K_y \sigma_y)^2 / 4, \quad (6)$$

$$\bar{P}_y = P_y / (E^* R^2) = 2\bar{h}_y^{3/2} / 3, \quad (7)$$

где $K_y = (0.756 - 0.450\nu)^{-1}$, где ν — коэффициент Пуассона. Для $\nu = 0.3$ $K_y = 1.611$.

Заменим абсолютную нагрузку ее относительной величиной $K = P/P_y$. Пластическую твердость представим в виде: $HD = K_H \varepsilon_y E^*$, где $K_H = K_H(\varepsilon_y, n)$ определяется согласно [1; 28] с использованием результатов КЭ моделирования [11; 12].

Выражения (4) и (5) представим в виде:

$$h_p = h_y \frac{K - 1}{3} \frac{K_y}{K_H}, \quad (8)$$

$$h_0 = h_y K^{\frac{2}{3}}. \quad (9)$$

С учетом выражений (7) и (8) из (3) имеем:

$$\left(\frac{h_y}{h_e} \right)^3 - \frac{2K_y}{3K_H} \frac{K - 1}{K^2} \left(\frac{h_y}{h_e} \right) - \frac{1}{K^2} = 0. \quad (9)$$

Выражения (7) – (9) отличаются тем, что величины деформаций определяются только степенью нагружения K и безразмерными величинами K_y , K_H и h_y .

Для определения действительного корня $y_k = y_k(K, \varepsilon_y, n)$ кубического уравнения (9) следует использовать формулу Кардано. Искомая величина относительной упругой деформации $h_e/h_y = y_k^{-1}$. Для сравнения на рис. 1 представлена зависимость безраз-

мерного относительного усилия с относительной величиной внедрения, полученная авторами [11]:

$$\bar{P} = P / (E^* R^2) = \bar{P}_y K = \exp(-B) (h/R)^A, \quad (10)$$

где $A = A(\varepsilon_y, n)$, $B = B(\varepsilon_y, n)$ — функционалы параметров механических свойств.

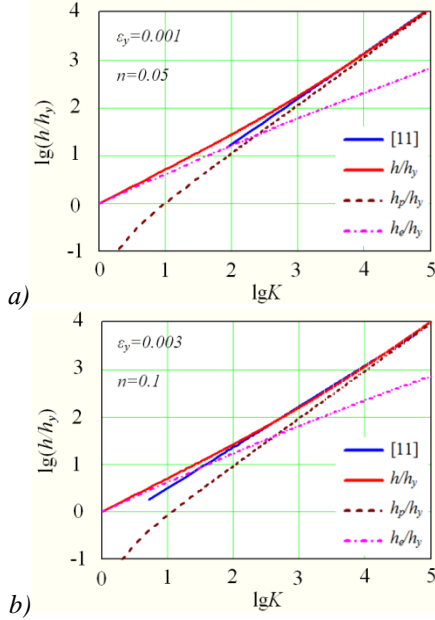


Рис. 1. Зависимости величин внедрения сферы от относительной нагрузки K

Как следует из зависимости на рис. 1, величина пластической составляющей h_p общей величины внедрения h с ростом относительной нагрузки K асимптотически приближается к кривой (10), полученной в результате конечно-элементного моделирования [11]. Предельная величина отношения $(h/h_y) = 0.4\bar{h}_y$ определяется условием функционирования уравнения (10).

Аналогичная методика предлагается для исследования сплющивания сферы и дальнейшего сравнения полученных результатов с моделями сплющивания [21; 22], учитывающими деформационное упрочнение.

Моделирование сплющивания сферы. При разработке модели сплющивания, аналогичной модели внедрения, описанной в предыдущем разделе, используем те же уравнения (2), (3) и (5). В качестве замыкающего уравнения в работе [27] предложено:

$$\bar{h}_p = \frac{h_p}{h} = a \left(\frac{P - P_0}{R^2 \cdot HD} \right)^b, \quad (11)$$

где для сплющивания сферы $a = 0.33$, $b = 1.23$.

Представляя абсолютную нагрузку через ее относительную величину $K = P/P_y$, имеем:

$$\bar{h}_p = a \left(\frac{\bar{P}_y (K - 1)}{K_H \varepsilon_y} \right)^b. \quad (12)$$

Из выражения (3) получим:

$$\bar{h}_e^3 + 2\bar{h}_p \bar{h}_e^2 - \bar{h}_0^3 = 0, \quad \bar{h}_0 = \bar{h}_y K^{2/3}; \quad (13)$$

$$(\bar{h}_e^{-1})^3 - 2a \left(\frac{\bar{P}_y (K - 1)}{K_H \varepsilon_y} \right)^b K^{-2} h_y^{-3} \bar{h}_e^{-1} - K^{-2} h_y^{-3} = 0. \quad (14)$$

Определяем действительный корень $y_k = y_k(K, \varepsilon_y, n)$ кубического уравнения (14) по формуле Кардано, тогда $\bar{h}_e = y_k^{-1}$, общая величина перемещения:

$$\bar{h} = \bar{h}_p + \bar{h}_e. \quad (15)$$

При исследованиях модели рассматривались три материала со следующими комбинациями параметров ε_y и n , характеризующих упрочняемость и упругие свойства: 0.001 и 0.05; 0.003 и 0.1; 0.005 и 0.2. При этом были обнаружены некоторые некорректные результаты, представленные на рис. 2 а.

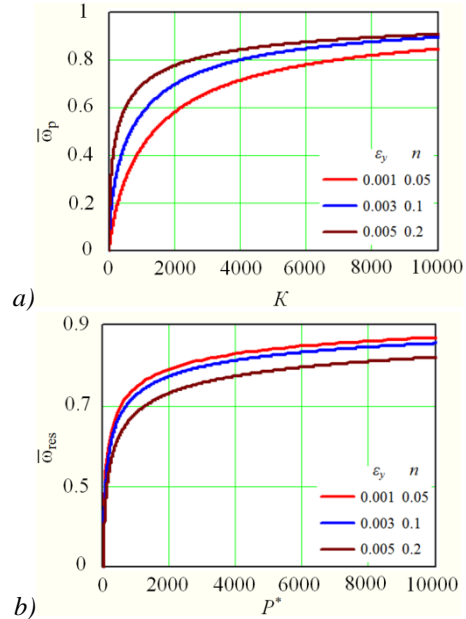


Рис. 2. Зависимость остаточных деформаций от относительной нагрузки

Как следует из зависимости на рис. 2 а, относительная остаточная деформация $\bar{\omega}_p = \bar{h}_p / \bar{h}$ для более упругого материала превышает аналогичную для более пластичного. На рис. 2 б показаны результаты расчета относительной остаточной деформации $\bar{\omega}_{res} = \omega_{res} / \omega$ согласно [21; 22] для тех же материалов, которые имеют противоположный характер и соответствуют действительности. Для более пластичных материалов относительная остаточная деформация больше, чем для более упругих.

Для решения возникшей проблемы был проведен анализ предложенных в работах [21; 22] моделей сплющивания, и установлено совпадение параметра $\bar{\omega}_{res}$, в том числе для больших значений ω^* или $\bar{\omega}$ (рис 3 а). Это несмотря на то, что безразмерные выражения для указанных моделей были получены путем наилучшей подгонки конечно-элементных результатов для диапазона $\omega^* \leq 120$.

Поэтому для создания качественной модели сплющивания была поставлена задача совпадения зависимостей $\bar{\omega}_{res} - P^*$ и $\bar{\omega}_p - K$. Скорректированные зависимости $\bar{\omega}_p - K$ для исследуемых материалов представлены на рис. 3 б.

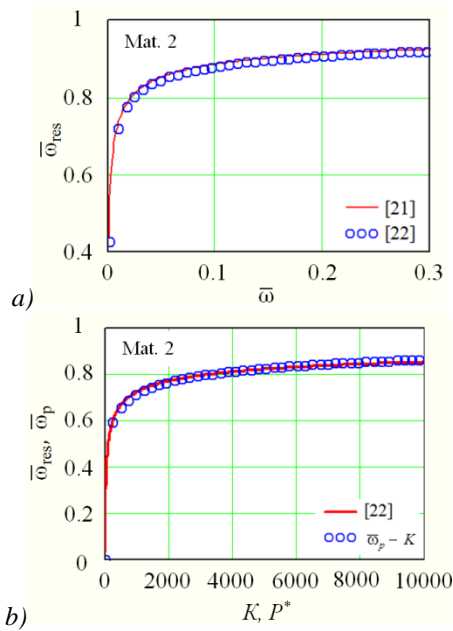


Рис. 3. Сравнение относительных остаточных деформаций для конечно-элементных моделей (а) и результаты коррекции величин остаточных деформаций (б)

Поставленной цели удалось достичь путем изменения параметров a и b в уравнении (11) так, как указано ниже в таблице. Таким образом, причиной некорректных результатов явилось некачественное представление замыкающего уравнения (11), заключающееся в неточности значений параметров a и b для выполнения дополнительного условия. Фактически была проведена модернизация методики, описанной выше.

Характеристики исследуемых материалов

Материал	Параметры упрочнения		K_H	Параметры уравнения (11)	
	ε_y	n		a	b
1	0.001	0.05	4.76	0.169	0.96
2	0.003	0.1	5.78	0.20	0.95
3	0.005	0.2	7.79	0.231	0.94

На рис. 4 представлены зависимости $P^* - \omega^*$ для конечно-элементных моделей [21; 22] и зависимость $K - \omega_h^*$, рассчитанная в системе уравнений (12), (14) и (15) для скорректированных значений параметров a и b .

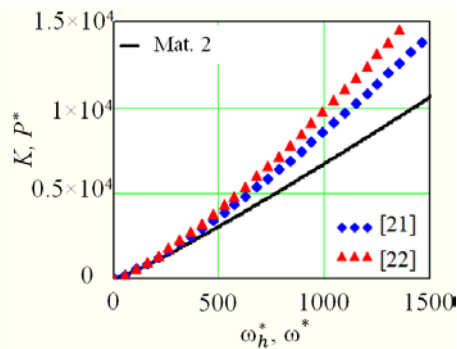


Рис. 4. Зависимости $K - \omega_h^*$ и $P^* - \omega^*$ для разных моделей сплющивания

Как следует из рис. 4, для конечно-элементных моделей зависимость $P^* - \omega^*$ показывает близкие результаты и немногим отличается от аналогичной зависимости $K - \omega_h^*$ в пределах $\omega^* \leq 250...350$. Значение параметра ω^* состоит исключительно в получении параметрической зависимости $A^*(\omega^*) - P^*(\omega^*)$, т. е. для получения конечного результата.

Для определения площади контакта было использовано свойство упругого восстановления отпечатка — независимость от характера распределения контактного давления. С учетом уравнения кривой разгрузки диаграммы кинетического индентирования следует [1; 28]:

$$\frac{Pm}{h-h_p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^* \sqrt{A}, \quad (16)$$

где A — площадь отпечатка; $m \approx 1.5$ — экспонента кривой разгрузки.

С учетом принятых обозначений из выражения (16) получим:

$$A_r = \left(\frac{m \bar{P}_y K}{2h_e} \right)^2. \quad (17)$$

На рис. 5 для тех же моделей показаны зависимости $A_r - K$ и $A_r - P^*$.

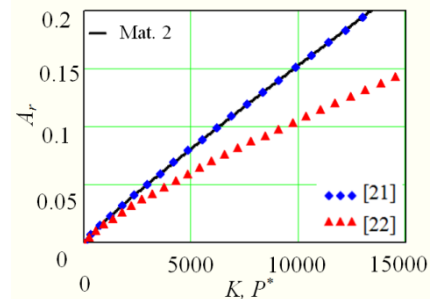


Рис. 5. Зависимости $A_r - K$ и $A_r - P^*$ для разных моделей сплющивания

Из рис. 5 следует хорошее совпадение зависимостей $A_r - K$ и $A_r - P^*$ для КЭ модели [21] и значительное расхождение для модели [22].

Отметим одну особенность конечно-элементных моделей [21; 22]. В каждой модели имеются параметрические зависимости $P^*(\omega^*)$, $A^*(\omega^*)$ и $\bar{\omega}_{res}(\omega^*)$. Последняя зависимость позволяет определить величину упругого восстановления. Из анализа выражения (17), где $K \equiv P^*$, следует, что если известна зависимость $A^*(\omega^*)$, то при известной $\bar{\omega}_{res}(\omega^*)$ можно определить $P_p^*(\omega^*)$. Возможно также из $P^*(\omega^*)$ определить $A_p^*(\omega^*)$. Например, рассмотрим первый вариант. Из выражения (17) получим «обновленную» зависимость:

$$P_a^* = \frac{2A_r^{0.5} \bar{\omega} (1 - \bar{\omega}_{res})}{m P_c}. \quad (18)$$

На рис. 6 представлены зависимости, аналогичные приведенным на рис. 4 и 5.

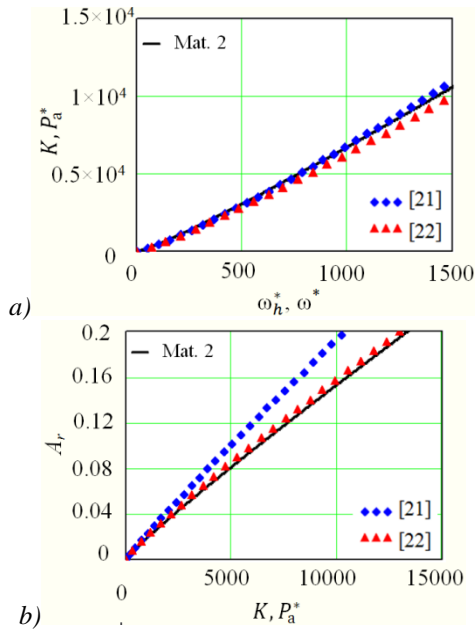


Рис. 6. Зависимости $K - \omega_h^*$ и $P_a^* - \omega^*$ (a) и $A_r - K$ и $A_r - P_a^*$ (b) для «обновленных» значений P_a^*

Как следует из рис. 6 a, имеет место качественно лучшее совпадение «обновленных» зависимостей для конечно-элементных моделей в сравнении с рис. 4. Интересный результат наблюдается на рис. 6 b, где имеет место хорошее совпадение «обновленных» зависимостей $A_r - K$ и $A_r - P_a^*$ для КЭ модели [22].

Заключение.

1. Отличительной характеристикой КЭ моделей сплющивания сферы является то, что их безразмерные выражения были получены для диапазона $\omega^* \leq 120$, что в десятки раз меньше, чем для моделей внедрения.

2. Апробированный подход к инженерным расчетам упругопластической деформации с использованием понятия пластической твердости и линейной зависимости остаточной деформации от приложенной нагрузки

Литература

1. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
2. Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study / chapter in: Contact and Fracture Mechanics. London: InTechOpen Limited, 2018. P. 3–25.
3. Greenwood, J. A., & Tripp, J. H. The Contact of Two Nominally Flat Rough Surfaces / Proceedings of the Institution of Mechanical. 1970. V. 185 (1). P. 625–633.
4. Демкин Н.Б. Контактное шероховатых поверхностей // М.: Наука. 1970. 227 с.
5. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение. 1977. 526 с.
6. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // Tribology International. 2016. V. 93. P. 78–90.
7. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic-Plastic Contact Mechanics // Applied Mechanics Reviews. 2017, V. 69. p. 060804.
8. Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and inden-

(модель Дрозда – Матлина) не учитывает деформационного упрочнения материала в явном виде.

Применение данного подхода для расчетов сплющивания сферы приводит к некорректным результатам.

3. Для учета деформационного упрочнения пластическая твердость представлена через характеристики степенного закона упрочнения. На основании этого была произведена модернизация рассматриваемой модели и получены безразмерные выражения в зависимости от степени нагружения $K = P/P_y$ и характеристик степенного закона упрочнения.

4. При применении данного подхода для моделирования сплющивания сферы были использованы результаты КЭ моделирования для определения остаточной деформации ввиду их одинаковых значений, в том числе для больших значений ω^* , для разных моделей сплющивания, учитывающих деформационное упрочнение.

Определен оригинальный способ обеспечения заданной величины остаточной деформации, которая определяется характеристиками упрочнения.

5. Конечно-элементные модели [21; 22] представлены параметрическими зависимостями $P^*(\omega^*)$, $A^*(\omega^*)$ и $\bar{\omega}_{res}(\omega^*)$. Если известна зависимость $A^*(\omega^*)$, то при известной зависимости $\bar{\omega}_{res}(\omega^*)$ можно определить $P_a^*(\omega^*)$. Это, как следует из рис. 5 b, расширяет возможности использования КЭ моделей сплющивания.

Сравнение КЭ моделей сплющивания с предлагаемым подходом показало возможность их использования для больших значений ω^* , несмотря на то, что их безразмерные выражения были получены для диапазона $\omega^* \leq 120$. При применении КЭ моделей сплющивания в трибологии [28] предпочтительно использовать модель [21] из-за степенного вида функций $P^*(\omega^*)$ и $A^*(\omega^*)$.

- tation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // Journal of tribology. 2006. V. 128 (1). P. 209–212.
9. Taljat B., Pharr G. M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic-plastic solids // International Journal of Solids and Structures. 2004. № 41. P. 3891–3904.
10. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. № 53. P. 2037–2069.
11. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136–4153.
12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. V. 31. P. 636–640.
13. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials-a FEM study // Materials Science and Engineering A. 2006. V 415. P. 59–65.
14. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasiliev M.V. Study of elastoplastic contact of a spherical indenter with

- metals and solid lubricating coatings: Part 1. Critical loads // *Journal of Friction and Wear*. 2013. T. 34. № 1. C. 1–5.
15. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of spherical indenter with metals and solid lubricating coatings: Part 2. Contact characteristics // *Journal of Friction and Wear*. 2013. T. 34. № 2. C. 129–133.
 16. Kogut L., Etsion I. Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // *J. Appl. Mech.* 2002. V. 69. PP. 657–662.
 17. Etsion I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an Elastic-Plastic Loaded Spherical Contact // *Int. J. Solids Struct.* 2005. V. 42 (13). P. 3716–3729.
 18. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43:18–19. P. 5736–5749.
 19. Brizmer V., Zait Y., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on elastic-plastic spherical contact // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2006. V. 1 (5). P. 865–879.
 20. Shankar S., Mayuram M. Effect of strain hardening in elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat // *International Journal of Solid Structures*. 2008. V. 45. P. 3009–3020.
 21. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // *Int. J. of Mech. Sciences*. 2012. V. 56. P. 70–76.
 22. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. V. 94. PP. 20–26.
 23. Ghaednia H., Brake M.R. W., Berryhill M., Jackson R. L. Strain hardening from elastic–perfectly plastic to perfectly elastic flattening single asperity contact // *ASME. J. Tribol.* 2019. V. 141(3) P. 031402.
 24. Jackson R.L., Ghaednia H., Pope S. A solution of rigid–perfectly plastic deep spherical indentation based on slip-line theory // *Tribol. Lett.* 2015. V. 58(3). P. 1–7.
 25. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces*. 2019. P. 1–21.
 26. Drozd M.S., Matlin M.M. Nature of elastoplastic flattening of a segment of double curvature // *J. Friction & Wear*. 1990. V. 11. № 5. P. 9–17.
 27. Matlin M.M., Mozgunova A.I., Kazankina E.N., Kazankin V.A. Stiffness of the elastic-plastic contact of machine parts. M.: Mashinostroenie, 2015. 217 p
 28. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Advanced Materials Research*. 2013. V. 664. P. 625–631.
 29. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Indentation and flattening of rough surfaces spherical asperities // *International Journal of Engineering and Technology (UAE)*. 2018. Vol. 7. № 2.23. P. 188–191.
 4. Demkin N.B. Contacting rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 227 p.
 5. Kragelskii I.V., Dobyichin M.N., Kombalov V.S. Basics of friction and wear calculations. M.: Mashinostroenie. 1977. 526 p.
 6. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology International*. 2016. V. 93. P. 78–90.
 7. Ghaednia H., Wang X., Saha S., Xu Y., Sharma A., Jackson R.L. A Review of Elastic-Plastic Contact Mechanics // *Applied Mechanics Reviews*. 2017, V. 69. P. 060804
 8. Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // *Journal of tribology*. 2006. V. 128 (1). P. 209–212.
 9. Taljat B., Pharr G. M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic-plastic solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2004. № 41. P. 3891–3904.
 10. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *J. Mech. Phys. Solids* 2005. № 53. P. 2037–2069.
 11. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. № 43. P. 4136–4153.
 12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Desing*. 2010. V. 31. P. 636–640.
 13. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials-a FEM study // *Materials Science and Engineering A*. 2006. V 415. P. 59–65.
 14. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasiliev M.V. Study of elastoplastic contact of a spherical indenter with metals and solid lubricating coatings: Part 1. Critical loads // *Journal of Friction and Wear*. 2013. T. 34. № 1. C. 1–5.
 15. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of spherical indenter with metals and solid lubricating coatings: Part 2. Contact characteristics // *Journal of Friction and Wear*. 2013. T. 34. № 2. C. 129–133.
 16. Kogut L., Etsion I. Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // *J. Appl. Mech.* 2002. V. 69. P. 657–662.
 17. Etsion I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an Elastic-Plastic Loaded Spherical Contact // *Int. J. Solids Struct.* 2005. V. 42(13). P. 3716–3729.
 18. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43:18–19. P. 5736–5749.
 19. Brizmer V., Zait Y., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on elastic-plastic spherical contact // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2006. V. 1 (5). P. 865–879.
 20. Shankar S., Mayuram M. Effect of strain hardening in elastic-plastic transition behavior in a hemisphere in contact with a rigid flat // *International Journal of Solid Structures*. 2008. V. 45. P. 3009–3020.
 21. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and unloading of a spherical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // *Int. J. of Mech. Sciences*. 2012. V. 56. P. 70–76.
 22. Zhao B., Zhang S., Wang Q., Zhang Q., Wang P. Loading and unloading of a power-law hardening spherical contact under stick contact condition // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. V. 94. PP. 20–26.
 23. Ghaednia H., Brake M.R. W., Berryhill M., Jackson R. L. Strain hardening from elastic–perfectly plastic to perfectly elastic flattening single asperity contact // *ASME. J. Tribol.* 2019. V. 141 (3) P. 031402.

References

1. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.
2. Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study / chapter in: *Contact and Fracture Mechanics*. London: InTechOpen Limited, 2018. P. 3–25.
3. Greenwood, J. A., & Tripp, J. H. The Contact of Two Nominally Flat Rough Surfaces / *Proceedings of the Institution of Mechanical*. 1970. V. 185 (1). P. 625–633.

24. Jackson R.L., Ghaednia H., Pope S. A solution of rigid–perfectly plastic deep spherical indentation based on slip-line theory // *Tribol. Lett.* 2015. V. 58 (3). P. 1–7.
25. Saha S., Jackson R.L. Elastic and elastic-perfectly plastic analysis of an axisymmetric sinusoidal surface asperity contact // *Tribology – Materials, Surfaces & Interfaces.* 2019. P. 1–21.
26. Drozd M.S., Matlin M.M. Nature of elastoplastic flattening of a segment of double curvature // *J. Friction & Wear.* 1990. V. 11. № 5. P. 9–17.
27. Матлин М.М., Мозгунова А.И., Казанкина Е.Н., Казанкин В.А. Жесткость упругопластического контакта деталей машин. М.: Машиностроение, 2015. 217 с.
28. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Advanced Materials Research.* 2013. V. 664. P. 625–631.
29. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Indentation and flattening of rough surfaces spherical asperities // *International Journal of Engineering and Technology (UAE).* 2018. Vol. 7. № 2.23. P. 188–191.