

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 621.01:621.81: 621.891

DOI:10.18324/2077-5415-2020-1-7-12

## Определение перемещений точек поверхности полупространства при действии осесимметричной нагрузки сложной формы

П.М. Огар<sup>a</sup>, Е.В. Угрюмова<sup>b</sup>, С.В. Герасимов<sup>c</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>weblab@brstu.ru, <sup>c</sup>sergey\_bratsk@mail.ru<sup>a</sup><https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, <sup>b</sup><https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>, <sup>c</sup><https://orcid.org/0000-0002-3841-3121>

Статья поступила 18.02.2020, принята 20.02.2020

Показано, что при сплющивании сферы распределение контактного давления представляет собой функцию сложной формы. Знание и описание функции распределения контактного давления имеет практическую важность при решении вопросов упругого продавливания материалов и упругого восстановления отпечатка при разгрузке. Представлена методология определения перемещений точек полупространства при действии нагрузки сложной формы, т. е. нагрузки, которую можно представить комбинацией нескольких уравнений для описания на смежных участках. С этой целью авторы предлагают использовать осесимметричную нагрузку вида  $p(r) = p_m(1 + \beta)(1 - r^2/a^2)^\beta$ , где  $-0.5 \leq \beta \leq 0.5$ . Указано, что ранее используемый авторами метод не подходит для определения перемещения полупространства от сложной нагрузки. Согласно предлагаемой методике вначале определяется перемещение точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от кольцевой нагрузки, создаваемой постоянным давлением  $p_r$  на кольцевой площадке шириной  $dr$  на расстоянии  $r$  от оси симметрии для случаев, когда  $r_a \leq r$  и  $r_a > r$ . Затем определяется суммарное перемещение точки  $A(r_a, 0)$  в пределах действия нагрузки простого вида. Сравнение аналитических результатов определения перемещений точек полупространства, полученных по предлагаемой методике, с ранее полученными результатами показало их идеальное совпадение. Это позволяет рекомендовать использование предлагаемой методики для определения перемещения в пределах и вне области действия на полупространство нагрузки сложной формы. Представлены выражения для использования предлагаемой методики для определения перемещений полупространства от нагрузки, описываемой двумя функциями.

**Ключевые слова:** сплющивание сферы; осесимметричная нагрузка; распределение контактного давления; кольцевая элементарная нагрузка; перемещение точек полупространства; нагрузка сложной формы.

## Determination of displacements of surface points of a half-space under the action of axisymmetric complex load

P.M. Ogar<sup>a</sup>, E.V. Ugryumova<sup>b</sup>, S.V. Gerasimov<sup>c</sup>

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>ogar@brstu.ru, <sup>b</sup>weblab@brstu.ru<sup>a</sup><https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, <sup>b</sup><https://orcid.org/0000-0002-0764-2028>, <sup>c</sup><https://orcid.org/0000-0002-3841-3121>

Received 18.02.2020, accepted 20.02.2020

It is shown that when the sphere is flattened, the distribution of contact pressure is a function of complex shape. The knowledge and description of the contact pressure distribution function is of practical importance in solving the issues of elastic punching of materials and elastic recovery of an imprint during unloading. A methodology for determining the displacements of half-space points under the action of a load of complex shape, i.e. load, which can be represented by a combination of several equations to describe in adjacent areas. To this end, the authors propose the use of an axisymmetric load of the form  $p(r) = p_m(1 + \beta)(1 - r^2/a^2)^\beta$ , where  $-0.5 \leq \beta \leq 0.5$ . It is indicated that the method previously used by the authors is not suitable for determining the movement of half-space from a complex load. According to the proposed methodology, the displacement of point  $A(r_a, 0)$  is first determined (half-spaces from the annular load created by constant pressure  $p_r$  on the annular platform with a width  $dr$  at a distance  $r$  from the axis of symmetry for cases when  $r_a \leq r$  and  $r_a > r$ . Then the total displacement of point  $A(r_a, 0)$  is determined (within the limits of the load of a simple form. Verification of the obtained analytical results by the proposed method with the previously obtained by the determination of the displacements of the points of half-space showed their perfect coincidence. This made it possible to recommend the use of the proposed methodology for determining displacements within and outside the range of action on a half-space of a

load of complex shape. Expressions are presented for using the proposed technique for determining the displacements of half-space from a load described by two functions.

**Keywords:** flattening of the sphere; axisymmetric load; distribution of contact pressure; annular elementary load; displacement of half-space points; complex load.

**Введение.** Большинство моделей инженерных поверхностей на микроуровнях представлены неровностями в виде набора сферических сегментов одинаковых радиусов с гауссовым распределением по высоте [1] или с распределением, соответствующим кривой опорной поверхности [2; 3]. Для расчета реальной площади контакта и других характеристик указанные модели предполагают, что контакт двух шероховатых поверхностей может быть представлен как контакт эквивалентной шероховатой поверхности с гладкой плоскостью. Решение данной задачи имеет приложения в трибологии [4–6], герметологии [7–11], в электро- [12; 13] и термоконтактах [14–16].

Контакт отдельной неровности в большинстве случаях также моделируют как контакт сферы и плоскости, которые разделяют на две основные группы [17]: модели внедрения, когда плоскость деформируется, а полусфера либо жесткая, либо упругая; модели сплющивания, когда плоскость считается жесткой, а сфера деформируется. Как указано в работах [18; 19], в прошлом было выполнено много аналитических, экспериментальных и численных исследований с целью моделирования и прогнозирования свойств контакта, однако из-за сложности процесса не было предложено замкнутого решения для упругопластических контактов.

При внедрении сферы в деформируемое полупространство различают упругую область, а также области ограниченной и развитой упругопластичности [20; 21]. Они отличаются соотношением роли двух независимых процессов — упругого продавливания (*sink-in*) и пластического вытеснения материала (*pile-up*), что подтверждается результатами работы [22]. Очевидно также наличие указанных областей при сплющивании сферы. Поэтому, на наш взгляд, к проблемам изучения упругопластичности можно отнести вопросы упругого продавливания материалов и упругого восстановления отпечатка при сплющивании сферы ввиду их практической важности. Напомним, что их решение актуально при использовании диаграммы кинетического индентирования для описания упругопластического контактного взаимодействия [23], а также при определении плотности стыка шероховатых поверхностей [24] и определении контактных характеристик при разгрузке предварительно нагруженного стыка [25].

Для решения указанных задач необходимо знание распределения давления на площадке контакта. В работе [23] показано, что если ветвь упругопластического нагружения сферы диаграммы кинетического индентирования имеет вид:

$$P = C_l h^\alpha, \quad (1)$$

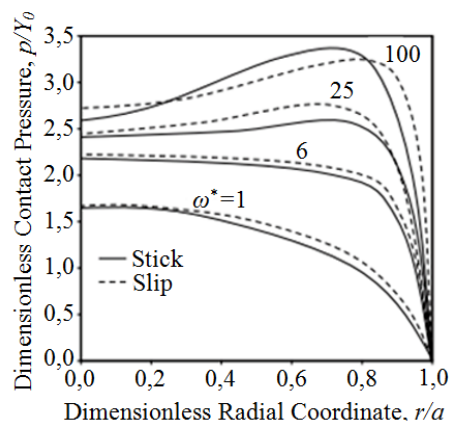
где  $C_l = P_m h_m^{-\alpha}$ ;  $P_m$  — максимальная нагрузка;  $h$  — перемещение в контакте;  $h_m$  — максимальное перемещение;  $\alpha = 1 \dots 1.5$  — константа, то распределение давления на площадке контакта описывается выражением:

$$p(r) = p_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^\beta, \quad (2)$$

где  $\beta = \alpha - 1$ ;  $p_0 = p_m(\beta + 1)$ ;  $p_m = P/(\pi a^2)$  — среднее давление в контакте.

Аналитические выражения для распределения давления на площадке контакта при сплющивании сферы в технической литературе практически отсутствуют. Исключение составляют работы [26; 27]. Авторами [26] впервые была предложена упругопластическая эмпирическая модель, согласно которой распределение контактного давления для пластически деформированной сферы предполагалось равномерным и равным максимальному герцевскому давлению при критическом перемещении. В работе [27] аналогично предложено равномерное распределение давления в центральной части области контакта и эллиптическое распределение вне этой части, начиная с максимального давления и приближаясь к нулю на границе контакта.

В работе [28, рис. 3] V. Grizmer с соавторами представили распределение контактного давления, полученное в результате конечно-элементного моделирования, при сплющивании сферы в условиях сцепления (*stick*) и в условиях скольжения (*slip*) для разных значений относительной величины сплющивания  $\omega^*$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Влияние на распределение безразмерного контактного давления условий нагружения [28]

Как следует из [27; 28], распределение давления на площадке может быть сложной формы, т. е. представлять собой комбинацию нескольких уравнений для описания на разных участках. Возникает вопрос — как, в случае действия на полупространство распределения давления сложной формы, определить перемещения в пределах и вне области действия нагрузки? Ответ на данный вопрос определяет цель настоящих исследований.

**Методология решения поставленной задачи.** Определение напряженно-деформированного состояния при действии на полупространство нагрузки вида (2) рассмотрено в работе [29]. Ранее в технической литературе по теории упругости и механике контактного

взаимодействия [30; 31 и др.] были рассмотрены частные случаи напряженно-деформированного состояния: при  $\beta = 0$  (равномерное распределение), при  $\beta = 0,5$  (герцевское распределение), при  $\beta = -0,5$  (постоянное нормальное смещение, или осадка). Для  $0 < \beta < 0.5$  данные отсутствовали ввиду сложностей получения аналитических выражений при интегрировании произведений степенных функций с дробными степенями. Используя описанный в [31, раздел 4.3] метод для вычисления перемещений во внутренней точке от нагрузки вида (2), авторы [29] получили:

$$\bar{u}_z(r) = \frac{p_m a}{E} \cdot (1 + \beta) \cdot 2^{2\beta+1} \times \times B(\beta + 1, \beta + 1) {}_2F_1\left(-\beta - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (3)$$

где  $B(\alpha_1, \alpha_2)$  — бета-функция;  ${}_2F_1(a, b, c, x)$  — гипергеометрическая функция Гаусса;  $E$  — модуль упругости.

Аналогично для точки вне круговой области нагружения:

$$\bar{u}_z(r) = \frac{p_m a}{E^*} \cdot (1 + \beta) \frac{2^{2\beta+1} B(\beta + 1, \beta + 1)}{\pi \cdot \frac{r}{a}} \times \times B\left(\frac{1}{2}, \beta + \frac{3}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \beta + 2; \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (4)$$

Как показал анализ полученных выражений (3) и (4), они действительны для значений  $-0.5 \leq \beta \leq 0.5$ , однако для распределения контактных давлений сложной формы используемый в [29] метод не подходит.

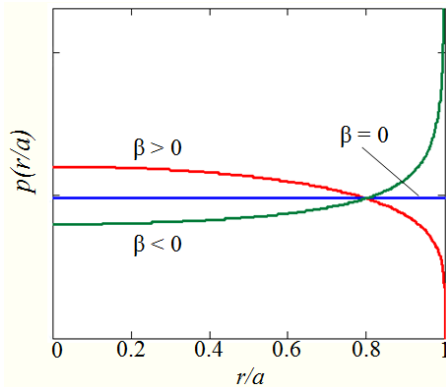


Рис. 2. Схемы распределения давлений нагрузки вида (2)

На рис. 2 представлены графические схемы зависимости вида (2) при положительных и отрицательных значениях  $\beta$ , а также при  $\beta = 0$ . Как следует из схем (рис. 2), распределение нагрузки сложной формы (например, на рис. 1 или в работе [27]) на разных участках можно представить комбинациями функций вида (2) с разными степенями. Суть предлагаемого нами метода приведена ниже.

Так как приложенная к полупространству нагрузка является осесимметричной, вначале определим перемещение точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от кольцевой нагрузки, создаваемой постоянным давлением  $p_r$  на кольцевой площадке шириной  $dr$  на расстоянии  $r$  от

оси симметрии. При этом следует различать случаи, когда  $r_a \leq r$  (рис. 3а) и когда  $r_a > r$  (рис. 3б).

Рассмотрим случай, когда  $r_a \leq r$ . Перемещения от действия нормального давления, распределенного по области  $S$  поверхности полупространства, могут быть найдены посредством суперпозиции с использованием результатов для сосредоточенной силы  $P$ . Для осевых перемещений [31]:

$$\bar{u}_z = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \cdot \frac{P}{s}, \quad (5)$$

где  $G = E/2(1 + \nu)$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $s$  — расстояние от точки действия сосредоточенной силы  $P = p_r \cdot ds d\varphi$  до точки  $A(r_a, 0)$ .

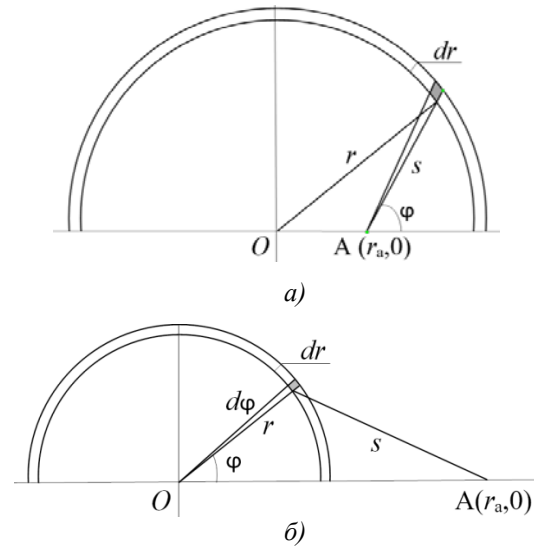


Рис. 3. Схема определения перемещений точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от элементарной кольцевой нагрузки для  $r_a \leq r$  (а) и для  $r_a > r$  (б)

Перемещение точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от кольцевой нагрузки (рис. 3а):

$$d\bar{u}_z = \frac{p_r}{\pi E} \iint_S ds d\varphi. \quad (6)$$

Из теоремы косинусов следует:

$$r^2 = r_a^2 + s^2 - 2r_a s \cos(\pi - \varphi) = r_a^2 + s^2 + 2r_a s \cos \varphi, \quad (7)$$

$$s = -r_a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - r_a^2 \sin^2 \varphi}, \quad (8)$$

$$ds = \frac{r \cdot dr}{\left(r^2 - r_a^2 \sin^2 \varphi\right)^{0.5}} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), получим:

$$d\bar{u}_z = \frac{2p_r}{\pi E} \int_{r_0}^{\pi} \frac{dr d\varphi}{\left(1 - \frac{r_a^2}{r^2} \sin^2 \varphi\right)^{0.5}} = \frac{2p_r}{\pi E} \int_r 2K\left(\frac{r_a}{r}\right) dr, \quad (10)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода, который для удобства расчета в среде Mathcad представим в виде:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1(0.5, 0.5; 1; k^2). \quad (11)$$

Рассмотрим случай, когда  $r_a > r$ .

Из рис. 3б следует:

$$s^2 = r^2 + r_a^2 - 2rr_a \cos \varphi. \quad (12)$$

Перемещение точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от кольцевой нагрузки:

$$\begin{aligned} d\bar{u}_z &= \frac{2p_r}{\pi E} \int_0^\pi \int_r^{r_a} \frac{rdrd\varphi}{(r^2 + r_a^2 - 2rr_a \cos \varphi)^{0.5}} = \\ &= \frac{2p_r}{\pi E} \int_r^{r_a} \frac{2r}{r_a + r} K\left(\frac{2(r/r_a)^{0.5}}{1 + r/r_a}\right) dr. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим приложение выражений (10) и (13) для расчета перемещений точки в пределах действия нагрузки вида (2). Перемещения от кольцевой нагрузки для  $0 \leq r \leq r_a$  равны:

$$\bar{u}_{z1} = \frac{4(1+\beta)p_m}{\pi E} \int_0^{r_a} \frac{1}{1+r/r_a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\beta K\left(\frac{2(r/r_a)^{0.5}}{1+r/r_a}\right) dr; \quad (14)$$

перемещения от кольцевой нагрузки для  $r_a \leq r \leq a$ :

$$\bar{u}_{z2} = \frac{4(1+\beta)p_m}{\pi E} \int_0^{r_a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\beta K\left(\frac{r_a}{r}\right) dr. \quad (15)$$

С учетом выражения (11) и обозначая  $r/a = \rho$ ,  $r_a/a = \rho_a$  для суммарного перемещения точки  $A(r_a, 0)$  в пределах действия нагрузки вида (2), получим:

$$\bar{u}_{zA}(\rho_a) = \bar{u}_{z1}(\rho_a) + \bar{u}_{z2}(\rho_a), \quad (16)$$

где:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{z1}(\rho_a) &= \frac{p_m a}{E} 2(1+\beta) \int_0^{\rho_a} \frac{1}{1+\rho/\rho_a} (1-\rho^2)^\beta \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{4\rho/\rho_a}{(1+\rho/\rho_a)^2}\right) d\rho \end{aligned} \quad (17)$$

$$\bar{u}_{z2}(\rho_a) = \frac{p_m a}{E} 2(1+\beta) \int_{\rho_a}^1 (1-\rho^2)^\beta {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\rho_a^2}{\rho^2}\right) d\rho. \quad (18)$$

Для сравнения результатов расчета перемещений по выражениям (3) и (16) представим их левые части в безразмерном виде:

$$F_z(\rho) = \frac{\bar{u}_z(\rho)E}{ap_m}, \quad F_{zA}(\rho_a) = \frac{\bar{u}_{zA}(\rho_a)E}{ap_m}. \quad (19)$$

Как видно на рис. 4а, б, зависимости  $F_z(\rho)$  и  $F_{zA}(\rho_a)$  для значений  $\beta = 0.4$  и  $\beta = 0.1$  идеально совпадают. Это свидетельствует о возможности использования предлагаемой методики для определения перемещения в пределах и вне области действия на полупространство нагрузки сложной формы.

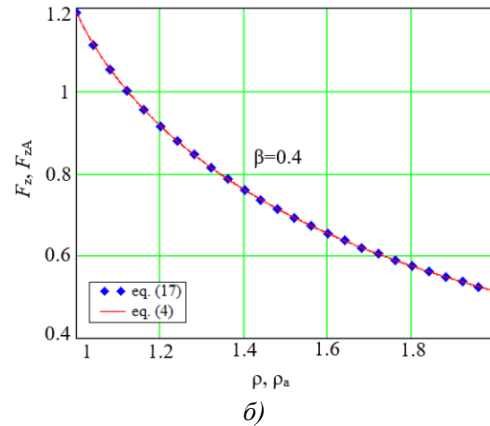
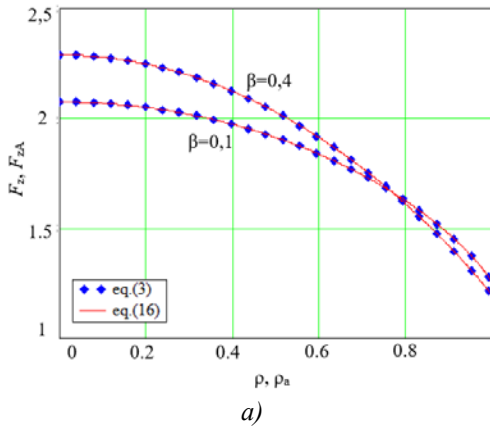


Рис. 4. Зависимости  $F_z(\rho)$  и  $F_{zA}(\rho_a)$  при разных значениях

Допустим, что для областей с  $0 \leq \rho \leq \rho_1$  и  $\rho_1 \leq \rho \leq 1$  распределение нагрузки описывается соответственно уравнениями  $p_1(\rho)$  и  $p_2(\rho)$ . В таком случае, если  $0 \leq \rho_a \leq \rho_1$ , то перемещение точки А равно:

$$\bar{u}_{zA}(\rho_a) = \frac{4a}{\pi E} \left[ \int_0^{\rho_a} \frac{p_1(\rho)}{1+\rho/\rho_a} K(k_1) d\rho + \int_{\rho_a}^{\rho_1} p_1(\rho) K(k_2) d\rho + \int_{\rho_1}^1 p_2(\rho) K(k_2) d\rho \right], \quad (20)$$

где  $k_1 = k_1(\rho, \rho_a) = \frac{2(\rho/\rho_a)^{0.5}}{1+\rho/\rho_a}$ ,  $k_2 = k_2(\rho, \rho_a) = \frac{\rho_a}{\rho}$ .

Для  $\rho_1 \leq \rho_a \leq 1$  перемещение точки А:

$$\bar{u}_{zA}(\rho_a) = \frac{4a}{\pi E} \left[ \int_0^{\rho_1} \frac{p_1(\rho)}{1+\rho/\rho_a} K(k_1) d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_a} \frac{p_2(\rho)}{1+\rho/\rho_a} K(k_1) d\rho + \int_{\rho_1}^1 p_2(\rho) K(k_2) d\rho \right] \quad (21)$$

Если точка А находится вне области действия нагрузки, то перемещения:

$$\bar{u}_{zA}(\rho_a) = \frac{4a}{\pi E} \left[ \int_0^{\rho_1} p_1(\rho) K(k_1) d\rho + \int_{\rho_1}^1 p_2(\rho) K(k_1) d\rho \right]. \quad (22)$$

Аналогично можно определить перемещение точки при описании осесимметричной нагрузки тремя и более функциями.

В дальнейших исследованиях авторы рассмотрят целесообразность уточнения распределения контактных давлений при сплющивании сферы для определения плотности стыка шероховатых поверхностей и контактных характеристик при разгрузке предварительно нагруженного стыка.

#### Заключение.

1. Показано, что при сплющивании сферы распределение контактного давления представляет собой функцию сложной формы. Знание и описание функции распределения контактного давления имеет практическую важность при решении вопросов упругого продавливания материалов и упругого восстановления отпечатка при разгрузке.

2. Для описания нагрузки сложной формы, т. е. нагрузки, которую можно представить комбинацией нескольких уравнений для описания на смежных участках, авторы предлагают использовать осесимметричную нагрузку вида (2).

3. Указано, что ранее используемый метод [29] не подходит для определения перемещения полупространства от сложной нагрузки.

4. Согласно предлагаемой методике вначале определяется перемещение точки  $A(r_a, 0)$  полупространства от кольцевой нагрузки, создаваемой постоянным давлением  $p_r$  на кольцевой площадке шириной  $dr$  на расстоянии  $r$  от оси симметрии для случаев, когда  $r_a \leq r$  и  $r_a > r$ . Затем определяется суммарное перемещение точки  $A(r_a, 0)$  в пределах действия нагрузки простого вида.

5. Проверка полученных аналитических результатов по предлагаемой методике с ранее полученными в [29] по определению перемещений точек полупространства показала их идеальное совпадение.

6. Полученные результаты позволяют рекомендовать использование предлагаемой методике для определения перемещения в пределах и вне области действия на полупространство нагрузки сложной формы. Представлены выражения для использования предлагаемой методике при определении перемещений полупространства от нагрузки, описываемой двумя функциями.

#### Литература

- Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // Proc. R. Soc. Lond. Ser. 1966. A295. P. 300–319.
- Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
- Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Маш-е, 1977. 526 с.
- Bhushan V. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact // Tribology letters. 1998. V. 4 (1). P. 1–35.
- Wang Z., Liu X. Model for Elastic–Plastic Contact Between Rough Surfaces // ASME: Journal of Tribology. 2018. V. 140. P. 051402.
- Wang D., Zhang Z., Jin F., Fan X. Normal Contact Model for Elastic and Plastic Mechanics of Rough Surfaces // Acta Mech. Solida Sin. 2019. V. 32. P. 148–159.
- Polycarpou A.A., Etsion I. A Model for the Static Sealing Performance of Compliant Metallic Gas Seals Including Surface Roughness and Rarefaction Effects // Tribology transactions. 2000. V. 43 (2). P. 237–244.
- Bottiglione F., Carbone G., Mangialardi L., Mantriota G. Leakage mechanism in flat seals // Journal of Applied Physics. 2009. V. 106 (10). P. 104902.
- Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
- Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study / chapter in: Contact and Fracture Mechanics. London: InTechOpen Limited, 2018. P. 3–25.
- Zhang Q., Chen X., Huang Y., Chen Y. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // AIP Advances. 2018. V. 8. P. 045310.
- Измайлов В.В., Новоселова М.В. Контакт твердых тел и его проводимость. Тверь: ТГТУ, 2010. 110 с.
- Ghaednia H., Jackson R.L., Gao J. A third body contact model for particle contaminated electrical contacts // IEEE 60th Holm Conference on Electrical Contacts (Holm). 2014. P. 1–5.
- Fieberg C., Kneer R. Determination of thermal contact resistance from transient temperature measurements // Inter. J. Heat and Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 1017–1023.
- Luo X., Feng H., Liu Jv., Liu M., Liu S. An experimental investigation on thermal contact resistance across metal contact interfaces // International Conference on Electronic Packaging Technology & High Density Packaging. 2011. P. 733–738.
- Jackson R.L., Ghaednia H., Elkady Y.A., Bhavnani S.H., Knight R.W. A closedform multiscale thermal contact resistance model // IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. 2012. V. 2(7). P. 1158–1171.
- Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // Journal of tribology. 2006. V. 128 (1). P. 209–212.
- Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // Tribology International. 2016. V. 93. P. 78–90.
- Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // Tribology International. 2016. V. 93. P. 78–90.
- Ланков А.А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3–5.
- Воронин Н.А. Теоретическая модель упругопластического деформирования жесткой сферы // Трение и износ. 2003. № 1. С. 16–26.
- Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // MATEC Web of Conf. 2019. 298, 00093.
- Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // Adv. Mat. Research. 2013. V. 664. P. 625–631.
- Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Fedorov V. Ensuring the tightness of metal-polymer joints of hydropneumatic systems // Advances in Engineering Research. 2018. V. 158. P. 313–318.
- Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // MATEC Web of Conferences. 2017. 129, 06016.
- Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // ASME J. Tribol. 1987. V. 109. P. 257–263.

27. Evseev D.G., Medvedev B.M., Grigoriyan G.G. Modification of the Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // *Wear*. 1991. V. 150. P. 79–88.
28. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43:18-19. P. 5736–5749.
29. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences*. 2019. 298. 00094.
30. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
31. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
15. Luo X., Feng H., Liu Jv., Liu M., Liu S. An experimental investigation on thermal contact resistance across metal contact interfaces // *International Conference on Electronic Packaging Technology & High Density Packaging*. 2011. P. 733–738.
16. Jackson R.L., Ghaednia H., Elkady Y.A., Bhavnani S.H., Knight R.W. A closedform multiscale thermal contact resistance model // *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*. 2012. V. 2(7). P. 1158–1171.
17. Jackson R.L., Kogut L. A comparison of flattening and indentation approaches for contact mechanics modeling of single asperity contacts // *Journal of tribology*. 2006. V. 128 (1). P. 209–212.
18. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology Internationa*. 2016. V. 93. P. 78–90.
19. Ghaednia H., Pope S.A., Jackson R.L., Marghitu D. B. A comprehensive study of the elasto-plastic contact of a sphere and a flat // *Tribology Internationa*. 2016. V. 93. P. 78–90.
20. Lankov A.A. The probability of elastic and plastic deformations during compression of metallic rough surfaces // *Trenie-i-smazka-v-mashinah-i-mekhanizmah*. 2009. № 3. P. 3–5.
21. Voronin N.A. (2003) Theoretical model of elastic-plastic introduction of rigid sphere // *J. of friction and wear*. 2003. V. 24. P. 16–26.
22. Ogar P., Gorokhov D., Zhuk A., Kushnarev V. Contact geometry during indentation of a sphere into an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conf*. 2019. 298. 00093.
23. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // *Adv. Mat. Research*. 2013. V. 664. P. 625–631.
24. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Fedorov V. Ensuring the tightness of metal-polymer joints of hydropneumatic systems // *Advances in Engineering Research*. 2018. V. 158. P. 313–318.
25. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // *MATEC Web of Conferences*. 2017. 129, 06016.
26. Chang W.R., Etsion I., Bogy D.B. An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // *ASME J. Tribol.* 1987. V. 109. P. 257–263.
27. Evseev D.G., Medvedev B.M., Grigoriyan G.G. Modification of the Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces // *Wear*. 1991. V. 150. P. 79–88.
28. Brizmer V., Kligerman Y., Etsion I. The effect of contact conditions and material properties on the elasticity terminus of a spherical contact // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43:18-19. P. 5736–5749.
29. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences*. 2019. 298. 00094
30. Timoshenko S.P., Goodyer J. *Theory of Elasticity*. М.: Наука, 1979. 560 p.
31. Johnson K. *Contact mechanics*. М.:Mir, 1989. 510 p.

#### References

1. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces // *Proc. R. Soc. Lond. Ser.* 1966. A295. P. 300–319.
2. Demkin N.B. *Contacting rough surfaces*. М.: Nauka, 1970. 227 p.
3. Kragelskii I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. *Basics of friction and wear calculations*. М.: Mashinostroenie. 1977. 526 p.
4. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact // *Tribology letters*. 1998. V. 4 (1). P. 1–35.
5. Wang Z., Liu X. Model for Elastic–Plastic Contact Between Rough Surfaces // *ASME: Journal of Tribology*. 2018. V. 140. P. 051402.
6. Wang D., Zhang Z., Jin F., Fan X. Normal Contact Model for Elastic and Plastic Mechanics of Rough Surfaces // *Acta Mech. Solida Sin.* 2019. V. 32. P. 148–159.
7. Polycarpou A.A., Etsion I. A Model for the Static Sealing Performance of Compliant Metallic Gas Seals Including Surface Roughness and Rarefaction Effects // *Tribology transactions*. 2000. V. 43 (2). P. 237–244.
8. Bottiglione F., Carbone G., Mangialardi L., Mantriota G. Leakage mechanism in flat seals // *Journal of Applied Physics*. 2009. V. 106 (10). P. 104902.
9. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.
10. Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study / chapter in: *Contact and Fracture Mechanics*. London: InTechOpen Limited, 2018. P. 3–25.
11. Zhang Q., Chen X., Huang Y., Chen Y. Fractal modeling of fluidic leakage through metal sealing surfaces // *AIP Advances*. 2018. V. 8. P 045310.
12. Izmailov V.V., Novoselova M.V. *Contact of solids and its conductivity*. Tver': TGTU, 2010. 110 p.
13. Ghaednia H., Jackson R.L., Gao J. A third body contact model for particle contaminated electrical contacts // *IEEE 60th Holm Conference on Electrical Contacts (Holm)*. 2014. P. 1–5.
14. Fieberg C., Kneer R. Determination of thermal contact resistance from transient temperature measurements // *Inter. J. Heat and Mass Transfer*. 2008. V. 51. P. 1017–1023.