

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

УДК 62.752, 621.534, 629.4.015

DOI:10.18324/2077-5415-2019-4-7-13

### Особенности проявления динамических свойств взаимодействующих элементов в цепных структурах

А.В. Елисеев<sup>1а</sup>, И.С. Ситов<sup>2б</sup>, С.В. Елисеев<sup>3с</sup>

<sup>1</sup>Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

<sup>3</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия

<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б,с</sup> eliseev\_s@inbox.ru

<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>,

<sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>,

<sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>

Статья поступила 12.11.2019, принята 19.11.2019

*В предлагаемой статье развивается метод построения математических моделей для отображения динамических состояний технических объектов в модельных задачах динамики, в которых реализуются эвристические подходы и соответствующая методологическая база. Целью статьи является разработка детализированной технологии построения математических моделей взаимодействия элементов механической колебательной системы с неустойчивыми связями. Используются методы структурного математического моделирования, отражающего характерные особенности динамики взаимодействия элементов цепной механической колебательной системы с несколькими степенями свободы. Исследованы особенности динамических взаимодействий цепной структуры с тремя степенями свободы с позиций оценки возможностей формирования асимметрии параметров динамического состояния элементов при формировании динамических реакций связей при наличии одиночных и совместных действующих сил. Направления исследований связаны с разработкой способов и средств управления динамическими взаимодействиями элементов в механических колебательных системах с неустойчивыми связями, что характерно, в частности, для повышения надежности эксплуатации тяговых двигателей постоянного тока транспортных и технологических машин. Разработана методическая основа построения математических моделей. Получены аналитические соотношения, приводятся результаты вычислительного моделирования.*

**Ключевые слова:** цепные механические колебательные системы; динамические реакции связей; передаточные функции; динамическая жесткость.

### Features of the manifestation of dynamic properties of interacting elements in chain structures

A. V. Eliseev<sup>1а</sup>, I. S. Sitov<sup>2б</sup>, S. V. Eliseev<sup>3с</sup>

<sup>1</sup>Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

<sup>2</sup>Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>3</sup>Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia

<sup>а</sup> eavsh@ya.ru, <sup>б,с</sup> eliseev\_s@inbox.ru

<sup>а</sup> <https://orcid.org/0000-0003-0222-2507>,

<sup>б</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>,

<sup>с</sup> <https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>

Received 12.11.2019, accepted 19.11.2019

*The proposed article develops a method for constructing mathematical models to display the dynamic states of technical objects in model problems of dynamics in which heuristic approaches and the corresponding methodological base are implemented. The aim of the article is to develop a detailed technology for constructing mathematical models of interaction of elements of a mechanical oscillatory system with not-holding ties. The methods of structural mathematical modeling reflecting characteristic features of dynamics of interaction of elements of a chain mechanical oscillatory system with several degrees of freedom are used. The features of dynamic interactions of a chain structure with three degrees of freedom are studied from the standpoint of assessing the possibilities of forming asymmetry of the parameters of the dynamic state of the elements in the formation of dynamic reactions of bonds under the action of single and joint acting forces. Research areas are related to the development of methods and means to improve the reliability of dynamic interactions of elements in mechanical oscillatory systems with unstopable bonds, which is characteristic, in particular, to improve the reliability of operation of DC traction motors of transport and technological machines. The methodological basis for the construction of mathematical models has been developed; analytical relations have been obtained; the results of computational modeling are presented.*

**Keywords:** chain mechanical oscillatory systems; dynamic reactions of bonds; transfer functions; dynamic stiffness.

**Введение.** Многие объекты технического назначения в виде транспортных устройств и вибрационных технологических машин отображаются в задачах динамики механическими колебательными системами с сосредоточенными параметрами. Особенности таких систем нашли отражение в работах [1–3], в которых рассматриваются малые колебания технических объектов относительно положения статического равновесия или установившегося состояния при действии вибрационных нагрузок.

Взаимодействие элементов колебательных структур в предположении линейности свойств системы рассматривается на основе математических моделей с использованием либо дифференциальных уравнений во временной области, либо применяются методы интегральных преобразований (чаще всего преобразования Лапласа), что позволяет с учетом сделанных ограничений получить необходимую для оценок и расчетов соответствующую информацию. Особенностью упомянутых подходов является принятие определенных условий, характеризующих формы и особенности взаимодействия элементов систем. К их числу могут быть отнесены ориентация на использование для оценок динамических состояний кинематических параметров, обязательное существование удерживающих связей, отсутствие соударения элементов системы друг с другом и др.

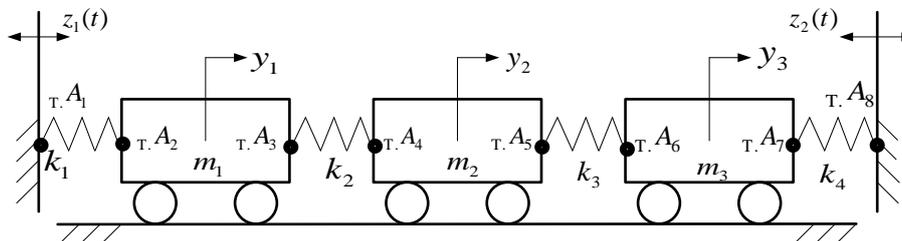
Во многих практических задачах приходится принимать во внимание особенности неустойчивых связей при взаимодействии элементов системы, что

характерно для транспортных устройств (контакт «колесо – поверхность» или «колесная пара – рельс»). В технологических вибрационных машинах, предназначенных для транспортировки сыпучих материалов и их классификации, реализации виброударных процессов обработки материалов взаимодействие с рабочими органами машин и соответствующими формами взаимодействия с окружающими и рабочей средой носит неустойчивающий характер [4–6].

Формы реализации неустойчивающих связей достаточно разнообразны и характерны для широкого класса электрических машин, в частности, для тяговых электродвигателей постоянного тока электровозов, а также коллекторных двигателей многих других технических объектов [7–9].

В предлагаемой статье рассматриваются возможности построения математической модели взаимодействия элементов цепных колебательных систем с использованием представлений о формах динамических реакций и связей.

**I. Некоторые общие положения.** Рассматривается технический объект, расчетная схема которого может быть представлена линейной цепной структурой, «включающей» в свой состав три инерционных элемента  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , связанных между собой и опорными поверхностями с помощью упругих элементов с коэффициентами жесткости  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ , как показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Расчетная схема технического объекта цепной колебательной структуры с тремя степенями свободы

Внешнее возмущение системы представлено двумя гармоническими функциями одной частоты, реализующими кинематическое возбуждение.

Для составления математической модели системы (рис. 1) во временной области используются уравнения Лагранжа 2-го рода [1]. Запишем выражение для кинетической и потенциальной энергии в системе координат  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , связанной с неподвижным базисом:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}_3^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_3 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (z_2 - y_3)^2. \quad (2)$$

Уравнение движения системы после выполнения ряда вспомогательных операций можно представить в виде:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2) - k_2 y_2 = k_1 z_1; \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_2 + k_3) - k_2 y_1 - k_3 y_3 = 0; \quad (4)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + y_3 (k_3 + k_4) - k_3 y_2 = k_4 z_2. \quad (5)$$

После интегральных преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях система уравнений (3) – (5) может быть записана в операторной форме:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = k_1 \bar{z}_1; \quad (6)$$

$$(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 - k_3 \bar{y}_3 = 0; \quad (7)$$

$$(m_3 p^2 + k_3 + k_4) \bar{y}_3 - k_3 \bar{y}_2 = k_4 \bar{z}_2. \quad (8)$$

Коэффициенты уравнений (6) – (8) приводятся в таблице.

Коэффициенты исходной системы уравнений в координатах  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ .

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m_1 p^2 + k_1 + k_2)$	$-k_2$	$0$
$a_{12}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_2$	$(m_2 p^2 + k_2 + k_3)$	$-k_3$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$0$	$-k_3$	$(m_3 p^2 + k_3 + k_4)$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$
$k_1 \bar{z}_1$	$0$	$k_4 \bar{z}_2$

Примечание:  $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  — комплексная амплитуда; значок <-> над переменной соответствует изображению по Лапласу [1].

**II. Особенности математических моделей.** Используя уравнение движения в операторной форме, найдем передаточные функции системы, учитывая возможности одновременного действия двух возмущающих факторов. Поскольку внешние возмущения принимаются синфазными и имеют одну частоту, различие в амплитудах внешних воздействий может быть учтено соотношением:

$$\bar{Q}_3 = \alpha \bar{Q}_1, \tag{9}$$

где  $\alpha$  — коэффициент связности внешних воздействий, который может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения.

Выражения для передаточных функций системы имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{k_1(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + k_4\alpha(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{A(p)}; \tag{10}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_1(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + k_4\alpha(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}{A(p)}; \tag{11}$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{\bar{z}_1} = \frac{k_1(a_{12}a_{32} - a_{13}a_{22}) + k_4\alpha(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{A(p)}, \tag{12}$$

где:

$$A(p) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31} \tag{13}$$

является частотным характеристическим уравнением системы.

Из сравнения (10), (11), (12) следует, что в общем случае система имеет три резонансных режима, параметры которых определяются из уравнения (13). Кроме того, из (10), (12) следует, что в системе могут также возникать режимы динамического гашения колебаний по координатам  $y_1$  и  $y_3$  по двум частотам. По координате  $y_2$  возможен только один режим динамического гашения колебаний. Параметры режимов динамического гашения колебаний определяются частотами урав-

нений, получаемых при «обнулении» числителя выражения для передаточных функций.

**III. Динамические реакции связей.** Приведенная на рис. 1 механическая колебательная система с тремя степенями свободы может рассматриваться в качестве основы для оценки и решения в первом приближении задачи динамики коллекторно-щеточного узла тягового двигателя при наличии внешних воздействий на коллекторно-щеточный узел. При этом элементы с массами  $m_1$  и  $m_3$  могут отображать свойства щеток, а элемент  $m_2$  может рассматриваться как коллектор. Основное внимание при этом уделяется соотношениям динамических реакций связей, возникающих на элементах с массами  $m_1$  и  $m_3$ .

Используя математическую базу, изложенную в работе [10], отметим, что динамическая реакция связи  $\bar{R}_{m_1}$  для массоинерционного элемента  $m_1$  определяется выражением:

$$\bar{R}_{m_1} = -[(k_1 + k_2)\bar{y}_1 - k_2\bar{y}_2], \tag{14}$$

а для массоинерционного элемента с массой  $m_3$  реакция связей  $\bar{R}_{m_3}$  имеет вид соответственно:

$$\bar{R}_{m_3} = -[-k_3\bar{y}_2 + (k_3 + k_4)\bar{y}_3]. \tag{15}$$

Подобного рода задачи возникают, например, в динамике коллекторно-щеточных узлов тяговых двигателей электровозов [11].

Представленная на рис. 1 механическая колебательная система рассматривается в данном случае как модельная задача формирования асимметрии динамических нагрузок, передающихся на щеточный контакт при динамических нагрузках на корпус тягового двигателя. Такие нагрузки возникают при динамических взаимодействиях тягового двигателя при его взаимодействиях в рельсовых контактах и соударениях с элементами механической системы подвески тягового двигателя.

2. Для оценки асимметрии передачи силовых возмущений, формируемых в системе (рис. 1) при вибрации опорных поверхностей, на основе значений реакций  $\bar{R}_{m_1}$  и  $\bar{R}_{m_3}$  можно внести в рассмотрение коэффициент асимметрии контактного давления на элемент  $m_2$ :

$$\beta = \frac{\bar{R}_{m_1}}{\bar{R}_{m_3}} = \frac{(k_1 + k_2)W_1(p) - k_2W_2(p)}{-k_3W_2(p) + (k_3 + k_4)W_3(p)}. \tag{16}$$

Значение коэффициента асимметрии  $\beta$  (16) можно представить в виде отношения определителей:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k_2 m_1 p^2 & 0 \\ 0 & (k_1 + k_2) m_2 p^2 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 & -k_3 \\ \alpha & -k_3 (k_1 + k_2) & m_3 p^2 + k_3 + k_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 p^2 + k_1 + k_2 & -k_2 (k_3 + k_4) & 1 \\ -k_2 & (k_3 + k_4) m_2 p^2 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 & 0 \\ 0 & k_3 m_3 p^2 & \alpha \end{vmatrix}}. \quad (17)$$

В общем случае коэффициент  $\beta = \beta(\alpha, p)$  представляет рациональную дробь, сформированную биквадратными многочленами по  $p$ , стоящими в числителе и знаменателе. Особенности функциональной зависимости  $\beta = \beta(\alpha, \omega)$ ,  $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  определяются величинами  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$ , представляющими собой частоты, обнуляющие числитель и знаменатель (17) соответственно.

3. В статье вводится новое понятие, отражающее свойства асимметрии динамических нагрузений в соединениях взаимодействующих элементов механических колебательных систем. В данном случае на рис. 1 представлена модельная задача, построенная на оценках динамических свойств в системе цепного типа, содержащей обычный набор элементов в предположении реализации двухсторонних (или удерживающих) связей.

Рассматриваемая на рис. 1 расчетная схема может быть использована, например, для оценки особенностей нарушения коллекторно-щеточного узла тягового двигателя электроваза или для решения других задач динамики, характерных для вибрационных машин.

Что касается коллекторно-щеточных узлов тяговых двигателей, то в этом случае элементы с массами  $m_1$  и  $m_3$  отображают возможности нагружения щеток в горизонтальной связке; упругие элементы с жесткостями  $k_1$  и  $k_4$  обеспечивают упругие свойства щеточного узла путем прижатия щеток к коллектору. Элемент массой  $m_2$  в модельной задаче отражает упруго-инерционные свойства коллектора и щеток при нагрузках, передаваемых при движении локомотива и формировании при этом нагрузок, передающихся на разные стороны коллектора и расположенных на одной прямой (в плане прижимных действий и формирования динамических реакций связей). Такие связи будут взаимно-противоположными как в горизонтальном, так и вертикальном положениях.

4. Упругие элементы с жесткостями  $k_2$  и  $k_3$  в модельной задаче отображают упругие свойства прослойки, возникающей между щеткой как таковой и поверхностью коллектора. Гипотеза о формировании такой среды, состоящей из элементов разрушенного щеточного материала и поверхностного слоя коллектора, при прохождении тока высказывалась в [11], что представляется, с физической точки зрения, вполне допустимым предположением. Определенную роль при этом играет и поток воздуха, перекачиваемый через коллекторно-

щеточный блок двигателя для его охлаждения. В дальнейших исследованиях можно полагать, что выполняется соотношение:

$$k_2 = k_3 \gg k_1, \quad k_2 = k_3 \gg k_4. \quad (18)$$

Развивая представления о влиянии на работу коллекторно-щеточного узла внешних возмущений, которые возникают на тяговых двигателях как в нормальном режиме, так и в режиме рекуперации энергии, можно отметить возможность формирования существенных различий в динамических реакциях, возникающих при прижатии щеток к поверхности коллектора с диаметрально противоположных сторон.

Для оценки таких эффектов можно предложить введение коэффициента связности динамических реакций связей как отношение реакций противоположно расположенных элементов  $m_1$  и  $m_2$ .

**IV. Особенности динамических свойств системы с учетом реакций связей.** В качестве упрощения рассматриваемой модельной задачи значения масс и коэффициентов жесткости могут быть выбраны следующим образом:

$$m_1 = m_3 = m, \quad m_2 = M, \quad k_1 = k_4 = k, \quad k_2 = k_3 = K. \quad (19)$$

1. Выражение (17) для определения коэффициента  $\beta$ , отражающего возможности формирования асимметрии динамических реакций связи, можно представить с учетом (19), используя понятие об определителях [12] в виде:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & mp^2 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k & -1 \\ \alpha & mp^2 & 1 + \frac{mp^2 + k}{K} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \frac{mp^2 + k}{K} & mp^2 & 1 \\ -1 & (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k & 0 \\ 0 & mp^2 & \alpha \end{vmatrix}}. \quad (20)$$

Критические значения параметра связности внешних воздействий  $\alpha$ , обнуляющие числитель и знаменатель коэффициента асимметрии  $\beta$ , могут быть представлены выражениями:

$$\alpha_0 = - \frac{\begin{vmatrix} (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k & -1 \\ mp^2 & 1 + \frac{mp^2 + k}{K} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} mp^2 & 0 \\ (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k & -1 \end{vmatrix}}, \quad (21)$$

$$\alpha_\infty = - \frac{\begin{vmatrix} -1 & (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k \\ 0 & mp^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + \frac{mp^2 + k}{K} & mp^2 \\ -1 & (1 + \frac{k}{K})Mp^2 + 2k \end{vmatrix}}. \quad (22)$$

В предельном случае  $K \rightarrow \infty$  коэффициент асимметрии  $\beta$  принимает вид:

$$\beta(\omega, \alpha) = \frac{(M + (1 - \alpha)m)\omega^2 - 2k}{(\alpha M + (\alpha - 1)m)\omega^2 - 2\alpha k}. \quad (23)$$

Особенности функциональной зависимости коэффициента  $\beta = \beta(\alpha, \omega)$ ,  $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$  от  $\omega$  — частоты внешних возмущений и  $\alpha$  параметра связности определяются величинами  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$ :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M + (1 - \alpha)m}, \quad (24)$$

$$\omega_\infty^2 = \frac{2\alpha k}{\alpha M + (\alpha - 1)m}, \quad (25)$$

где  $\omega_0$  — частота, на которой числитель (23) обращается в ноль, а  $\omega_\infty$  — частота, при которой знаменатель (23) обращается в ноль, т. е.  $\beta \rightarrow \infty$ , при  $\omega \rightarrow \omega_\infty$ .

2. Дробно-рациональные выражения (24), (25) позволяют найти значения частот, при которых  $\beta$  может принимать нулевые значения (частота  $\omega_0$ ) и бесконечно большие значения (частота  $\omega_\infty$ ).

Отметим, что графики зависимостей характеристики асимметрии  $\beta$  существенным образом зависят от значений коэффициента связности внешних воздействий  $\alpha$ . В качестве примеров на рис. 2–6 приведены графики  $\beta(\omega)$  при различных значениях  $\alpha$ .

На рис. 2 приведен характерный график коэффициента  $\beta(\omega)$  в зависимости от частоты внешних возмущений  $\omega$  для коэффициента связности внешних возмущений  $\alpha = 0$  и параметров системы, принимающих значения  $k = 0.721 \text{ кН/м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ ,  $M = 2.25 \text{ кг}$ . График функции  $\beta(\omega)$  имеет в модельном примере особенности на частотах:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M + m}} \approx 21 \text{ рад./с.}, \omega_\infty = 0. \quad (26)$$

Равенство нулю коэффициента связности  $\alpha$  означает, что одна из возмущающих внешних сил равна нулю, т. е.

на систему действует одна внешняя гармоническая сила  $\bar{Q}_1$ , приложенная к массоинерционному элементу  $m_1$ . Представленная зависимость  $\beta(\omega)$  для  $\alpha = 0$  иллюстрирует, что при одиночном действии внешнего возмущения связность внешних воздействий может существенно повлиять на асимметрию динамических реакций.

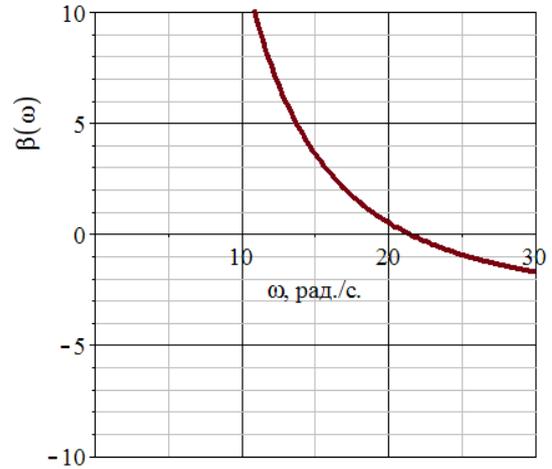


Рис. 2. График функции  $\beta(\omega)$   $\alpha = 0$ ,  $k = 0.721 \text{ кН/м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ ,  $M = 2.25 \text{ кг}$ .  $\omega_0 = 21 \text{ рад/с.}$ ,  $\omega_\infty = 0 \text{ рад/с.}$

3. В качестве базы для сравнения могут быть рассмотрены графики коэффициентов асимметрии (рис. 3 и 4), соответствующие коэффициентам связности внешних сил, принимающие значения  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = -1$ . Значение параметра связности  $\alpha = 1$  может быть интерпретировано как равенство внешних воздействий по модулю и по направлению  $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_3$ . Соответствующий график  $\beta(\omega) \equiv 1$  представлен на рис. 3. Тожество  $\beta(\omega) \equiv 1$  соответствует равенству реакций  $\bar{R}_{m_1} = \bar{R}_{m_3}$ .

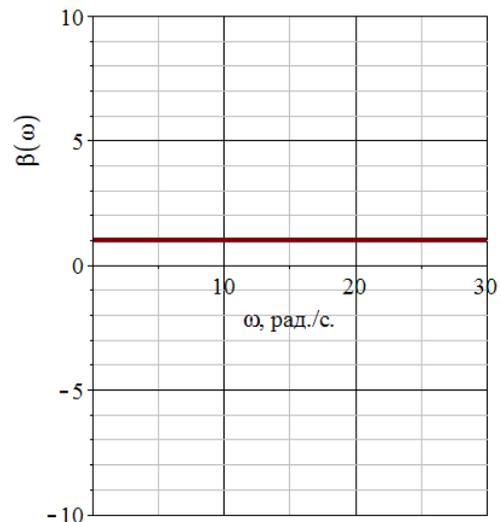
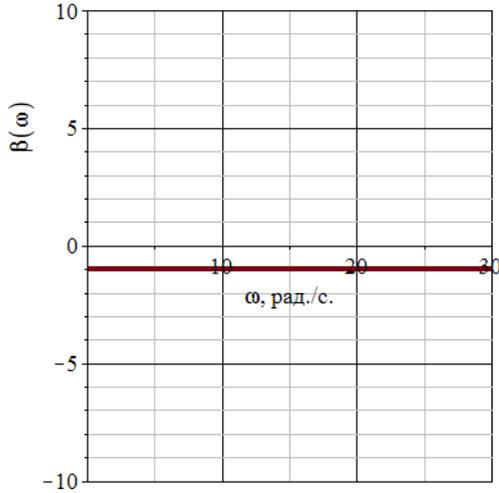


Рис. 3. График функции  $\beta(\omega)$   $\alpha = 1$ ,  $k = 0.721 \text{ кН/м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ ,  $M = 2.25 \text{ кг}$ .  $\omega_0 = 25.31 \text{ рад/с.}$ ,

$\omega_\infty = 25.31 \text{ рад/с.}$

На рис. 4 представлен график коэффициента  $\beta(\omega)$ , соответствующего значению параметра связности  $\alpha = -1$ . Значение  $\alpha = -1$  интерпретируется как равенство внешних воздействий по модулю и противополо-

ложность по направлению  $\bar{Q}_3 = -\bar{Q}_1$ . Соответствующий график  $\beta(\omega) \equiv -1$ , представленный на рис. 4, характеризует соотношение реакций в виде  $\bar{R}_{m_3} = -\bar{R}_{m_1}$ .

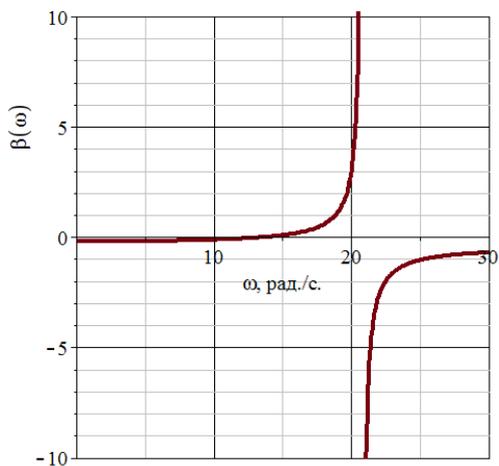


**Рис. 4.** График функции  $\beta(\omega)$   $\alpha = -1$ ,  $k = 0.721 \text{ kH} / \text{м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ .  $M = 2.25 \text{ кг}$ .  $\omega_0 = 18.86 \text{ рад} / \text{с}$ ,  $\omega_\infty = 18.86 \text{ рад} / \text{с}$ .

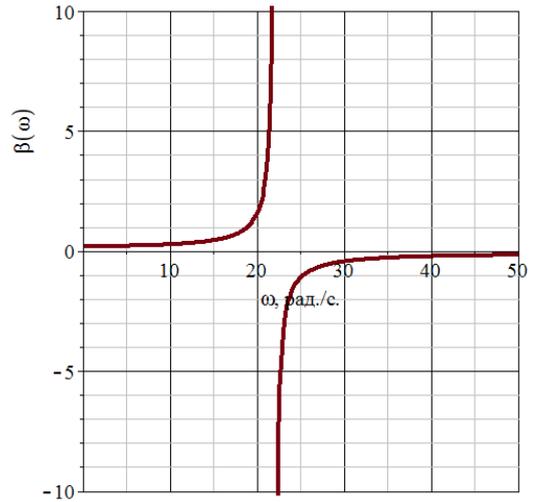
Отличительными особенностями от тождеств  $\beta(\omega) \equiv 1$  и  $\beta(\omega) \equiv -1$  служат варианты влияния значений коэффициента  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$  и  $\alpha < 0, \alpha \neq -1$  на коэффициент асимметрии  $\beta(\omega)$ .

На рис. 5 представлен вариант графика  $\beta(\omega)$  для параметров  $\alpha = -5$ ,  $k = 0.721 \text{ kH} / \text{м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ .  $M = 2.25 \text{ кг}$ . Представленный график  $\beta(\omega)$  имеет особенности в двух точках. В частности, на частоте  $\omega_0 = 13.72 \text{ рад} / \text{с}$  коэффициент  $\beta(\omega)$  принимает нулевое значение, а на частоте  $\omega_\infty = 20.81 \text{ рад} / \text{с}$  функция  $\beta(\omega)$  терпит разрыв 2-го рода.

На рис. 6 представлен вариант графика  $\beta(\omega)$  для параметров  $\alpha = 5$ ,  $k = 0.721 \text{ kH} / \text{м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ .  $M = 2.25 \text{ кг}$ . Представленный график  $\beta(\omega)$  имеет одну особенность на частоте  $\omega_\infty = 22.03 \text{ рад} / \text{с}$ , когда функция  $\beta(\omega)$  терпит разрыв 2-го рода.



**Рис. 5.** График функции  $\beta(\omega)$   $\alpha = -5$ ,  $k = 0.721 \text{ kH} / \text{м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ .  $M = 2.25 \text{ кг}$ .  $\omega_0 = 13.72 \text{ рад} / \text{с}$ ,  $\omega_\infty = 20.81 \text{ рад} / \text{с}$ .



**Рис. 6.** График функции  $\beta(\omega)$   $\alpha = 5$ ,  $k = 0.721 \text{ kH} / \text{м}$ ,  $m = 0.9 \text{ кг}$ .  $M = 2.25 \text{ кг}$ .  $\omega_0 = 32.68 \text{ рад} / \text{с}$ ,  $\omega_\infty = 22.03 \text{ рад} / \text{с}$ .

Таким образом, можно полагать, что  $\alpha$ , т. е. коэффициент связности внешних силовых воздействий на механическую колебательную систему, может рассматриваться как эффективный настроечный параметр.

**Заключение.** Предлагаемый подход в построении математических моделей технических объектов, работающих в специфических динамических условиях, позволяет определиться с выбором рациональных направлений в разработке конструктивно-технических решений, связанных с созданием надежных в эксплуатации машин, оборудования и аппаратуры при необходимости поддержания в условиях нормальной эксплуатации определенных требований к симметрии распределения нагрузок на отдельные элементы и узлы (или точки соединения) взаимодействующих элементов.

Для составления математических моделей ориентация исследований фиксируется на определении динамических реакций связей. Реакция связей формируется на основе структурной математической модели, отражающей свойства исходной механической колебательной системы, рассматриваемой как расчетная схема технического объекта. Однако при определении детализированных представлений в соотношении параметров предлагается упрощенный подход, сводящий структурную математическую модель к некоторой упрощенной модели, отражающей искомые динамические состояния в предельных соотношениях задачи. В качестве модельной рассматривается задача распределения усилий в формировании контактов в коллекторно-щеточном узле тягового двигателя с горизонтальным расположением щеток. Предлагаемый подход может быть распространен и на более сложные случаи расположения коллекторно-щеточных узлов. Важным для дальнейших приложений подхода является возможность выявления и учета при оценке динамических состояний технических объектов при динамических нагружениях асимметрии в распределении динамических реакций связей, определяющих формы взаимодействия элементов рассматриваемых объектов.

*Литература*

1. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. С. 459.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. P. 708.
3. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
4. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Ин-т компьютерных технологий, 2006. 176 с.
5. Сельвинский В.В., Елисеев С.В., Елисеев А.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неустойчивых связей: моногр. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.
6. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: моногр. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. 568 с.
7. Щербаков В.Г. Тяговые электродвигатели электропоездов. Новочеркасск: Наутилус, 1998. 672 с.
8. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Ситов И.С. Возможности структурного математического моделирования в оценке динамических свойств технологических вибрационных машин // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1(41). С. 7–15.
9. Eliseev S.V., Bolshakov R.S., Orlenko A.I., Trofimov A.N. Structural mathematical modelling: the concept of feedback in the dynamics of mechanical oscillation systems (IoP). Journal of Physics: Conference Series. 1210. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012037.
10. Кашуба В.Б., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Динамические реакции в соединениях элементов механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2016. 324 с.
11. Харламов В.В. Методы и средства диагностирования технического состояния коллекторно-щеточного узла тяговых электродвигателей и других коллекторных машин постоянного тока. Омск: Ом. гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2002. 233 с.
12. Кин Н Тонг. Теория механических колебаний. М.: Машиностроение, 1963. 351 с.

*References*

1. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. P. 459.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016. P. 708.
3. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, NY, Washington, DC: CRC Press, 2000. 957 p.
4. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika»: In-t komp'yuternyh tekhnologij, 2006. 176 p.
5. Sel'vinskij V.V., Eliseev S.V., Eliseev A.V. Dynamics of a vibratory interaction of elements of technological systems subject to unilateral constraints relations: monogr. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.
6. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibroimpact hardening: monogr. Voronezh: IPC «Nauchnaya kniga», 2011. 568 p.
7. Scherbakov V.G. Traction electric motors of electric locomotives. Novochoerkassk: Nautilus, 1998. 672 p.
8. Eliseev S.V., Bolshakov R.S., Sitov I.S. Possibilities of structural mathematical modeling in estimation of dynamic properties of technological vibration machines // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 1(41). P. 7–15.
9. Eliseev S.V., Bolshakov R.S., Orlenko A.I., Trofimov A.N. Structural mathematical modelling: the concept of feedback in the dynamics of mechanical oscillation systems (IoP). Journal of Physics: Conference Series. 1210. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012037.
10. Kashuba V.B., Eliseev S.V., Bolshakov R.S. Dynamic reactions in compounds of elements of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 324 p.
11. Harlamov V.V. Methods and means of diagnosing the technical condition of the brush-collector unit of traction motors and other DC collector machines. Om. gos. un-t putej soobshcheniya. Omsk, 2002. 233 p.
12. Kin N Tong. Theory of mechanical vibrations. M.: Mashinostroenie, 1963. 351 p.