

О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 11.10.2019, принята 15.11.2019

Применение закона Кулона для определения силы трения подразумевает соблюдение необходимого условия: тела должны совершать поступательное движение по отношению друг к другу. Между тем, существующая практика использования данного закона говорит о том, что это далеко не всегда соблюдается — например, при качении колеса (шара) с проскальзыванием, при скольжении тел с верчением, при снятии характеристики трения на существующих экспериментальных установках. Именно в таких случаях часто наблюдается расхождение опытных данных с результатами теории, а иногда искомые решения либо вообще не существуют, либо находятся неоднозначно, что принято называть парадоксами Пенлеве. По мнению автора, безосновательно также применение закона Кулона в дифференциальном виде при описании скольжения или качения тел с верчением. В статье приводятся примеры, говорящие о некорректности применения закона Кулона в таких случаях. Предлагается использовать новую теорию, основанную на методе кинематических зон и принципах физической мезомеханики, что позволит приспособить применение закона Кулона и для случаев, когда этот закон нельзя применять напрямую. В частности, новый подход позволяет объяснить уменьшение силы трения при скольжении тел вследствие верчения или качения; уменьшение моментов трения верчения и качения вследствие скольжения; возникновение вибраций колеса или тормозной колодки при торможении, возможные отскоки кусочка мела от доски при вычерчивании окружности. Новая теория, по видимому, является ключом к решению парадоксов Пенлеве для известных механических систем, где тела движутся не поступательно по отношению друг к другу, что показано еще на одном классическом примере, помимо двух ранее рассмотренных. Предложены новые подходы к описанию процессов торможения колесных систем и продольно-вращательного извлечения тела из грунта или его погружения. Определены границы применимости эффекта преобразования сухого трения (эффект Жуковского).

Ключевые слова: сухое трение; закон Кулона; сила трения скольжения; торможение; продольно-вращательное погружение; метод кинематических зон; парадоксы Пенлеве; эффект преобразования сухого трения (эффект Жуковского).

On the application of the Coulomb when the bodies slip, moving not progressively, and the Painlevé paradoxes

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 11.10.2019, accepted 15.11.2019

The application of the Coulomb law to determine the force of friction implies the observance of the necessary condition: bodies must perform translational motion in relation to each other. Meanwhile, the current practice of using this law suggests that this is far from being always observed. For example, it often happens when a wheel (ball) rolls with slipping, when bodies slide with a spin, and when the friction characteristics are measured on existing experimental installations. It is in such cases that the experimental data often diverge from the results of the theory, and sometimes the desired solutions either do not exist at all or are ambiguous, which is usually called the Painlevé paradoxes. According to the author, the application of the Coulomb law in a differential form for describing the sliding or rolling of bodies with spin is also groundless. The article provides examples of the incorrect application of the Coulomb law in such cases. Instead, it is proposed to use a new theory based on the method of kinematic zones and the principles of physical mesomechanics, which will make it possible to adapt the application of the Coulomb law for cases where this law cannot be applied directly. In particular, the new approach makes it possible to explain the decrease in the frictional force during the sliding of bodies due to spinning or rolling; reduction of the friction moments of rolling and spinning due to sliding; occurrence of vibration of the wheel or brake pads during braking, possible rebounds of a piece of chalk from the board when drawing a circle. The new theory, apparently, is the key to solving the Painlevé paradoxes for known mechanical systems, where bodies do not move translationally with respect to each other, which is shown by another classic example, in addition to the two previously considered. New approaches to the description of the processes of braking of wheel systems and longitudinal-rotational extraction of the body from the soil or its immersion are proposed. The applicability limits of the dry friction conversion effect (Zhukovsky effect) are determined.

Keywords: dry friction; Coulomb's law; sliding friction force; braking; longitudinal rotational immersion; method of kinematic zones; Painlevé paradoxes; dry friction conversion effect (Zhukovsky effect).

Введение. Закон Кулона для определения силы трения скольжения был установлен эмпирически, на основе опытных данных для тел, совершающих простое поступательное движение. Это означает, что поступательное движение тел по отношению друг к другу является необходимым условием применимости этого закона. Между тем, существующая практика говорит о частом несоблюдении этого условия. Например, закон Кулона напрямую используется в таких часто встречающихся случаях [1–7], как качение колеса с проскальзыванием, торможение колеса колодкой, обработка характеристики трения на существующих экспериментальных установках, использование эффекта преобразования сухого трения (эффект Жуковского) при непоступательном движении одного или двух тел пары — что, по мнению автора, делается неправильно. При скольжении или качении тел с верчением закон Кулона принято применять в дифференциальном виде [7] — что тоже лишено оснований.

Аналогичная картина сложилась и при определении моментов трения качения и верчения [1–7]: законы для их определения были установлены для простых движений, соответственно, для чистого качения и верчения, а используются они, в том числе, и при качении с проскальзыванием и (или) верчением — по формулам, полученным для простых движений, что также говорит о невыполнении аналогичного необходимого условия — рассматриваемое тело должно совершать только качение или верчение.

Такая неаккуратность в соблюдении необходимых условий при использовании соответствующего закона о трении приводит к заметным расхождениям теории и практики при решении соответствующих прикладных задач [7; 8], в частности, при моделировании процесса торможения в железнодорожном [5; 6] и автомобильном [2; 3] транспорте, а также к возникновению парадоксов Пенлеве [9–18], когда искомые решения либо не существуют, либо находятся неоднозначно, при отсутствии определенности в выборе действительного решения. Например, для таких классических систем, как тормозная колодка [9–15; 17; 18] и вращающийся диск, который вжимается постоянной силой в угол [13].

Цель данной статьи — показать, как следует корректно применять закон Кулона в тех случаях, когда необходимые условия для этого не выполняются. Предлагается использовать для этого новую теорию автора, которая основана на методе кинематических зон и принципах физической мезомеханики. Данная статья является продолжением недавних публикаций автора, сделанных в течение прошедших двух лет, о применении закона Кулона для механических систем с сухим трением [19–26].

Метод кинематических зон. Согласно новой теории [19–26] предложено в пятне контакта соприкасающихся тел различать следующие кинематические зоны: скольжения — где точки движутся с одинаковыми скоростями; верчения — где точки движутся с разными скоростями; сцепления — где точки неподвижны. Наряду с обычными размерами кинематических зон на макромасштабном уровне — макрозонами, используя принципы физической мезомеханики, будем различать

микрозоны на мезомасштабном уровне. Такие кинематические микрозоны для краткости в дальнейшем будем называть мезозонами. Каждая такая кинематическая зона отвечает за одно из одноименных (по названию зоны) простых движений. Предполагается, что рост таких кинематических зон по числу, размерам (площади) и времени жизни происходит прямо пропорционально соответствующей кинематической скорости, отвечающей за данное простое движение, а при отсутствии движения (состояние покоя) — пропорционально силам или моментам, стремящимся сдвинуть тело и тем самым, пытающимся сообщить телу одно из простых движений. Кинематические мезозоны имеют возможность сливаться друг с другом при высокой их концентрации и переходить в макрозоны по размерам (площади) и продолжительности времени жизни. В этом случае удастся обнаруживать их в нашем макромире. Так, в 1876 г. О. Рейнольдсом были зафиксированы зоны сцепления и скольжения в пятне контакта цилиндра при качении. Возможность их одновременного наблюдения на макромасштабном уровне можно объяснить, по-видимому, тем, что в пятне контакта могут возникать зоны кажущегося скольжения за счет относительной деформации колеса и основания в направлении движения. На моделях абсолютно твердых тел, при отсутствии деформаций, такое было бы трудно представить. Очевидно, что для каждой такой кинематической зоны будет работать закон Кулона применительно к тому простому движению, за которое отвечает данная зона. Отметим, что при скольжении тел с верчением пятно контакта заранее сформировано и имеет постоянные размеры. Поэтому изменение общей площади, занимаемой мезозонами скольжения, может происходить только за счет изменения общей площади мезозон верчения и наоборот. При скольжении с верчением кинематические мезозоны, хотя и имеют возможность сливаться друг с другом при высокой их концентрации, но времена их жизни остаются малыми, что не дает им возможность переходить в полной мере в макрозоны [6]. Поэтому кинематические зоны скольжения и верчения при непоступательном скольжении не могут быть обнаружены в макромире. В противном случае в макромире могло бы наблюдаться, что часть твердого тела в пятне контакта движется поступательно, а часть — совершает верчение. Такого быть не может. В других вариантах комбинированной кинематики движения пятно контакта может изменяться, а кинематические зоны могут изменяться, и независимо друг от друга, по размерам и по площади [22].

При комбинированной кинематике движения твердого тела (рис. 1 и 2) вместо формулы Кулона $F = fN$ предлагается следующая формула для определения силы трения [19–22]:

$$F = F_0 \frac{|\nu| + \Delta}{|\nu| + k\varepsilon|\Omega| + br|\omega| + \Delta}, F_0 = fN, \quad (1)$$

где f — коэффициент трения скольжения, который определяется согласно закону Кулона, справедливость которого предполагается для скольжения, когда оно присутствует без верчения и качения ($\Omega \equiv \omega \equiv 0$):

$$f = f_0 \operatorname{sign} v, n p u v \neq 0; [-f_1, f_1], n p u v \equiv 0, \left(\frac{f_1}{f_0} \geq 1\right).$$

Здесь F – сила трения; N — прижимная сила; v, Ω, ω — соответственно линейная скорость скольжения, угловые вращения и качения (знак модуля в формулах допускает возможность скоростей принимать отрицательные значения); Δ, a, b – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально (введение коэффициента Δ означает наличие трения покоя для силы трения); r — радиус колеса (шара) в случае качения; ε — средний радиус пятна контакта (при качении можно принять, что $\varepsilon = r$).

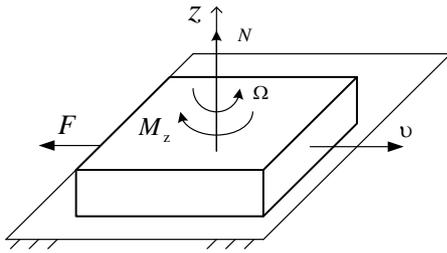


Рис. 1. Тело, совершающее скольжение ($v \neq 0$) с вращением ($\Omega \neq 0$) по шероховатой плоскости

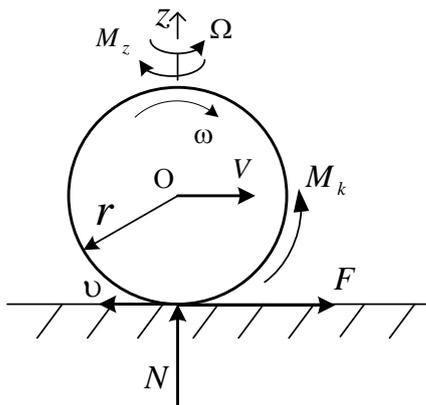


Рис. 2. Колесо (шар) при качении ($\omega \neq 0$) с проскальзыванием ($v = V - r\omega \neq 0$) и вращением ($\Omega \neq 0$)

Формула (1) определяет сумму сил трения, возникающих в зонах скольжения (их может быть несколько) пятна контакта для текущего момента времени. Для каждой такой зоны применяется обычный закон Кулона — для них необходимое условие применения закона соблюдается, так как они совершают на каждом временном интервале мезомасштабного уровня поступательное движение. Значение коэффициента при F_0 в формуле (1) определяет, какую часть от всей площади пятна контакта составляет суммарная зона скольжения, а значит, и ту часть силы давления, которая приходится на зоны скольжения. Для определения коэффициентов аппроксимации Δ, a, b следует использовать методику, приведенную в работе автора [26]. Здесь существенно то, что размеры и площади таких зон, как и самого пятна контакта, конкретно определять не надо (что иногда пытались делать другие авторы при использо-

вании контактных напряжений и закона Кулона в дифференциальном виде). Формула (1) учитывает, что суммарная площадь зон скольжения, а значит, и сила давления, приходящаяся на эти зоны, прямо пропорциональна модулю линейной скорости скольжения и обратно пропорциональна модулям угловых скоростей вращения и качения. Прежний, классический подход к задачам такого рода сводился к нахождению компонент сил сухого трения через контактные напряжения. Это приводило к необходимости решения ряда проблем, решения которых не найдены до сих пор.

Пользуясь случаем, замечу, что именно работы Виктора Филипповича Журавлева (например, [7]) послужили отправной точкой в создании новой теории, основанной на методе кинематических зон и принципах физической мезомеханики. И, прежде всего, в использовании аппроксимации Паде для представления компонент сил сухого трения в аналитическом виде через кинематические скорости.

Замечания к теории качения колеса. Классическая теория качения [1; 2] предполагает, что колесо и опорная поверхность деформируются — в противном случае моменту трения качения было бы неоткуда взяться, — а при определении силы трения скольжения о деформации тел как бы забывают, и сила трения определяется в соответствии с законом Кулона, в виде постоянной силы, как для абсолютно твердого тела. Причем на то, что колесо совершает не поступательное движение, внимание тоже никем не обращалось. Все это вызывает сомнения в правильности прежних подходов в теории качения колеса. Во-первых, поскольку модель абсолютно твердого тела при качении неприемлема, надо быть последовательным и принимать во внимание деформацию, в том числе и при нахождении силы трения скольжения. Во-вторых, возникающая деформация должна изменяться во время движения колеса, а значит, и сила трения, и момент трения качения должны быть переменными — что классическая теория качения не допускала, считая их постоянными величинами. В новой теории качения [19–22], основанной на методе кинематических зон, как раз и вводятся переменные сила трения скольжения и момент трения качения — в виде аналитических зависимостей от кинематических скоростей. Интересно заметить, что поначалу такая попытка выглядела как нечто вопиющее, не укладывающееся в привычные представления о данном вопросе. Достаточно сказать, что возможность уменьшения силы трения скольжения при росте угловой скорости казалась настолько маловероятной, что В.Ф. Журавлев в своей известной дискуссии с В.В. Козловым характеризовал такую возможность как новый закон природы, если такое подтвердится. А в монографии А.П. Иванова «Основы теории систем с сухим трением» даже специально подчеркивалось, что момент трения качения никак не может зависеть от угловой скорости качения.

Говорить о парадоксах Пенлеве с позиций абсолютно твердого тела для классических систем, где имеются тела качения, для которых модель абсолютно твердого тела неприемлема, было бы просто некорректно. Например, для таких систем [9–13], как тормозная ко-

лодка (рис. 3) и вдавливание постоянной силой вращающегося диска в угол.

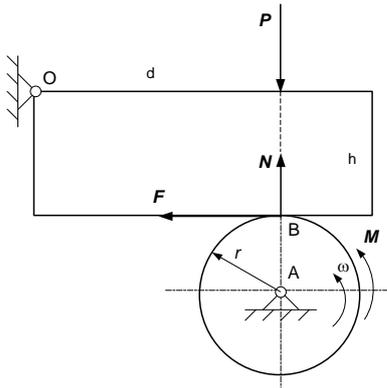


Рис. 3. Классическая модель тормозной колодки

Поэтому в работе автора [25], где рассматривались такие парадоксы, учитывалась возможность деформирования соприкасающихся тел — через изменчивость силы трения скольжения. Дополнительно к ранее сказанному по данным вопросам можно отметить, что возможность возникновения вибраций тормозной колодки как в продольном, так и в поперечном направлениях объясняется тем, что и сила трения, и реакция со стороны цилиндра — величины переменные. А то, что вертикальная вибрация была заметна не всегда [27], а лишь вблизи критических значений параметров, можно объяснить тем, что при таких значениях сила реакции принимает значения, близкие к ее максимуму, а значит, и ее изменения становятся наиболее заметными, в том числе и визуально. Действительно (рис. 3), полагая в формуле (1): $v \equiv r\omega$; $\Omega \equiv 0$, получим:

$$F = fP \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}; \quad (2)$$

$$N = P \left[1 + \frac{h}{d} f \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta} \right]. \quad (3)$$

Критические параметры здесь вблизи значений, когда $d = hf$. Как уже утверждалось в работе [25], подчеркну еще раз, что сводить все к «удару сухим трением» [17] при объяснении парадокса Пенлеве для данной системы было бы неправильно. Такой «удар» может быть, но он необязателен.

Экспериментальные факты в сравнении с теорией. Ниже приводятся некоторые экспериментальные факты, говорящие о том, что при несоблюдении необходимого условия применение закона Кулона напрямую может приводить к результатам, которые не согласуются с опытными данными. А именно: во всех приведенных примерах сила трения скольжения, определяемая напрямую по закону Кулона, получается постоянной величиной. О том, что на самом деле это не так, будут говорить опытные данные, и приведенная формула (1) подтверждает это.

1. При скольжении тел с верчением (рис. 1), например, при работе полировочной или уборочной машины, сила трения скольжения становится заметно меньше при наличии верчения рабочего органа в сравнении с

тем, когда верчение отсутствовало бы. И наоборот, момент трения верчения уменьшается при росте скорости скольжения. Это отмечается, в частности, в работах [7; 8] и обосновывается в [22].

2. При качении колеса с проскальзыванием сила трения скольжения должна быть заметно меньше при небольшом скольжении в сравнении с полным юзом. Иначе говоря, сила трения скольжения по величине должна зависеть от степени проскальзывания колеса относительно полотна дороги — формула (1) это подтверждает. Ранее считалось, что сила трения скольжения при качении с проскальзыванием постоянна [1; 2] и фактически соответствует ее максимальному значению, как при полном юзе.

3. При извлечении стержня (трубы) из грунта (рис. 4) придание вращательного движения телу заметно облегчает данный процесс. Это принято объяснять эффектом Жуковского: придание дополнительного поперечного движения телу облегчает его скольжение в заданном направлении [7]. Для нашего случая со стержнем это записывается так [28] (рис. 4):

$$F = fN;$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_{r\omega}^2}; F_x = F \frac{v_x}{\sqrt{F_x^2 + F_{r\omega}^2}}; F_{r\omega} = F \frac{r\omega}{\sqrt{F_x^2 + F_{r\omega}^2}}. \quad (4)$$

Откуда следует, что $F_x < F$.

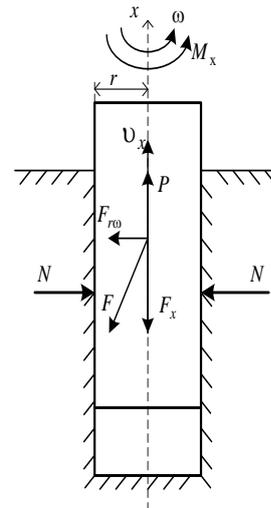


Рис. 4. Модель продольно-вращательного извлечения стержня (трубы) из грунта

Причем считалось, что составляющая сила трения не только уменьшается, но и проявляет свойства вязкого трения. Последнее означает, что стержню можно было придать очень маленькую угловую скорость вращения, чтобы он начал извлекаться из грунта; никакого заклинивания в поступательном движении не должно быть. Однако наблюдения показывают, что, например, чтобы заклинивший гвоздь стал вытаскиваться, необходимо добиться не малой, а заметной угловой скорости. Иначе говоря, не при всякой угловой скорости вращения начнется процесс извлечения, и зона застоя в поступательном движении, присущая сухому трению, остается. А значит, с применением эффекта Жуковского здесь не все благополучно, и уравнения движения, приведенные в [28] для рассматриваемой задачи посту-

пательно-вращательного извлечения стержня, по мнению автора, неверны.

Наличие трения покоя при продольно-вращательном извлечении стержня говорит о том, что эффект Жуковского здесь неприменим. Это можно объяснить тем, что направление силы трения в этом случае не будет, вообще говоря, противоположно вектору абсолютной скорости скольжения — что подтверждается с помощью формул новой теории. На возможность, когда направление силы трения может быть направлено не по одной прямой с вектором абсолютной скорости, указывается и в работах [7; 29]. В монографии [29] это объяснялось для похожей задачи анизотропностью коэффициента трения, а в работе [7] при описании шимми — деформацией диаграммы распределения нормальных напряжений в сторону качения.

В данном случае для использования эффекта Жуковского отсутствует необходимое условие — такое же, как и для применения закона Кулона. Для использования эффекта Жуковского тела должны совершать поступательное движение по отношению друг к другу, ведь этот эффект является следствием закона Кулона.

Применим для этого случая новый подход, основанный на методе кинематических зон.

Согласно новой теории и формуле (1):

$$F = F_0 \frac{v_x + \Delta}{v_x + br\omega + \Delta}, F_0 = F|_{\omega=0} = fN, \quad (5)$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + (r\omega)^2}$, v_x — продольная скорость стержня.

Перед началом извлечения стержня, когда $v_x \equiv 0$:

$$P - F_0 \frac{\Delta}{rb\omega + \Delta} = 0 \Rightarrow P - F_0 \frac{1}{k} = 0,$$

где $k = 1 + \frac{br\omega}{\Delta}$ — коэффициент динамичности, вызванный вращением стержня. Тогда:

$$F_0 = kP \Rightarrow P - k \frac{P}{k} = 0 \Rightarrow P_d = \frac{P}{k},$$

где P_d можно назвать динамической силой извлечения.

Можно принять, что $P_{d1} = \frac{P_1}{k_*}$ предельное значение динамической силы, при которой начинается извлечение, где $P_1 = f_1 N$, определяет собой предельное значение статической силы (без наличия вращения), при которой началось бы извлечение. Извлечение стержня начинается, когда:

$$P_{d1} = P \Rightarrow k_* = \frac{f_1 N}{P},$$

где k_* — критическое значение коэффициента динамичности, через который определяется критическая угловая скорость вращения стержня: $\omega_* = \frac{\Delta}{br} (k_* - 1)$, достигнув которой, стержень начинает извлекаться из грунта.

В начале извлечения коэффициент трения покоя f_1 скачком уменьшается до значения трения скольжения f_0 , и дифференциальное уравнение поступательного движения принимает вид:

$$m\dot{v}_x = P - f_0 N \frac{v_x + \Delta}{v_x + br\omega + \Delta},$$

которое следует дополнить дифференциальным уравнением вращательного движения $I\dot{\omega} = M_x - rF$, где M_x — внешний момент пары сил, вызывающий вращение стержня.

В итоге получается система уравнений:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = P - f_0 N \frac{v_x + \Delta}{v_x + br\omega + \Delta}; \\ I\dot{\omega} = M_x - rf_0 N \frac{v_x + \Delta}{v_x + br\omega + \Delta}. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь Δ, a, b — коэффициенты аппроксимации; осевой момент инерции и масса стержня. Эти уравнения движения существенно отличаются от тех уравнений, что приведены в [28]. Введенная сила трения в виде (5) объясняет уменьшение силы трения за счет вращения (угловой скорости ω) и без необходимости применения эффекта Жуковского, при возможном наличии зон застоя (трения покоя). Последние можно в значительной мере уменьшить за счет увеличения угловой скорости вращения.

Аналогичным образом можно объяснить, например, и раскатку пакета круглых лесоматериалов, и работу демпфера Кудинова (рис. 5), и другие похожие случаи, что было принято объяснять эффектом Жуковского [7].

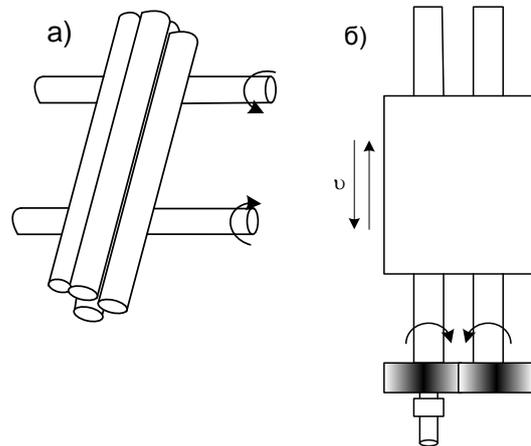


Рис. 5. Раскатка пакета круглых лесоматериалов (а); демпфер Кудинова (б)

Если рассматривать задачу о поступательно-вращательном погружении стержня, то помимо сил трения надо было бы вводить силу лобового сопротивления со стороны грунта. В работе [28] сила лобового сопротивления учитывалась в виде сухого трения, как это было общепринято при моделировании процессов погружения тел — что, по мнению автора, далеко от реальности, так как при таком подходе не учитывается изменчивость силы лобового сопротивления от скорости погружения и

угловой скорости вращения. А экспериментальные данные, например, при бурении говорят о наличии такой зависимости. Этот вопрос был решен автором на примере задач бурения [30; 31]. Для задания аналитической зависимости силы лобового сопротивления от кинематических скоростей использовалась также аппроксимация Паде.

4. При скольжении прямолинейного бруса вдоль боковой поверхности вращающегося цилиндра: при совпадении направлений вращения цилиндра и скольжения бруса сила трения будет меньше, чем при несовпадении направлений движения — что уже отмечалось в работе [26]. В качестве примера рассмотрим решение известной задачи из сборника задач Мещерского о нахождении закона движения стержня, лежащего на двух вращающихся цилиндрических шкивах (рис. 6). Классический подход подразумевает, что направление вращений цилиндров не влияет на определение величины силы трения [32]:

$$F_1 = fN_1; F_2 = fN_2, \text{ где } N_1 = \frac{l-x}{2l}mg; N_2 = \frac{l+x}{2l}mg.$$

Уравнение движения стержня имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{fg}{l}}$, x — координата смещения центра масс стержня, здесь и далее — точка соответствует производной по времени. Полученное уравнение соответствует гармоническим колебаниям стержня.

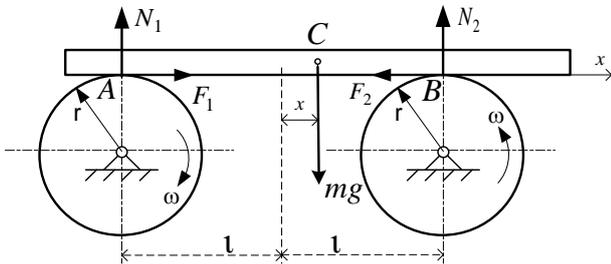


Рис. 6. Задача из сборника задач И.В. Мещерского о движении стержня на двух вращающихся цилиндрических шкивах

Новый подход дает иное решение. При определении сил трения, согласно (1), учитывается направление вращений шкивов, влияющих на величину этих сил через скорость скольжения:

$$F_1 = F_{01} \frac{|\dot{x} - r\omega| + \Delta}{|\dot{x} - r\omega| + bl\omega + \Delta}, F_2 = F_{02} \frac{|\dot{x} + r\omega| + \Delta}{|\dot{x} + r\omega| + bl\omega + \Delta},$$

где:

$$F_{01} = F_1|_{\dot{\phi}=0} = fN_1 = fmg \frac{l-x}{2l};$$

$$F_{02} = F_2|_{\dot{\phi}=0} = fN_2 = fmg \frac{l+x}{2l}.$$

Тогда уравнение движения стержня запишется так:

$$\ddot{x} + k^2 \left[(l+x) \frac{|\dot{x} + r\omega| + \Delta}{|\dot{x} + r\omega| + bl\omega + \Delta} - (l-x) \frac{|\dot{x} - r\omega| + \Delta}{|\dot{x} - r\omega| + bl\omega + \Delta} \right] = 0.$$

Записанное уравнение соответствует уже нелинейным колебаниям стержня. В отличие от гармонических колебаний, получается более сложный вид движения стержня (рис. 7–9) — колебания, близкие к нарастающим биениям.

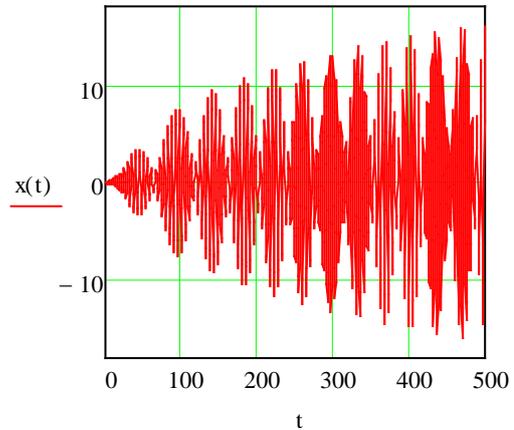


Рис. 7. Движение центра масс стержня: $x(0) = 0.1; \dot{x}(0) = 0.25$

($k = 1; \omega = 2.5; r = 1; l = 2; b = 0.12; \Delta = 1$).

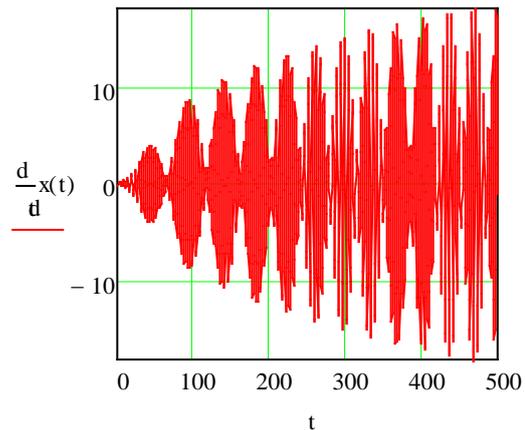


Рис. 8. Изменение скорости движения стержня

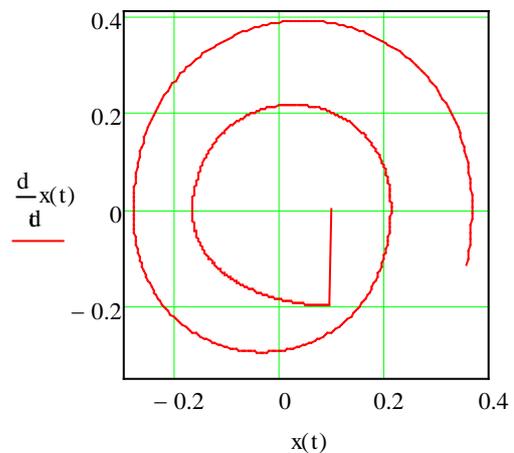


Рис. 9. Фазовая кривая

Результаты численного моделирования нуждаются в экспериментальной проверке.

5. Задача о торможении колеса железнодорожного транспорта (рис. 10).

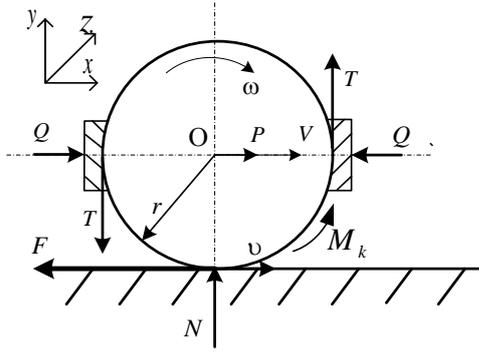


Рис. 10. Торможение колеса ($v = V - r\omega$)

Общепринятый подход [33] предполагает следующее (рис. 10): $F = fN$; $T = \mu Q$. Что приводит к уравнениям:

$$\begin{cases} m\dot{V} = P - F, \\ I\dot{\omega} = rF - 2rT, \\ \dot{V} = r\dot{\omega}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь первые два уравнения системы никак между собой не связаны, связь между ними осуществляется третьим уравнением системы. Последнее, третье уравнение определяет торможение колеса без проскальзывания относительно рельса, что далеко от действительности.

Новый подход, согласно формулам (1) и (2), учитывает иной вид для сил трения колеса с рельсом — F и тормозной колодкой — T :

$$F = F_0 \frac{|V - r\omega| + \Delta}{|V - r\omega| + br|\omega| + \Delta}, F_0 = F|_{\omega=0} = fN;$$

$$T = T_0 \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}, T_0 = T|_{\omega=0} = \mu Q;$$

в результате чего дифференциальные уравнения торможения примут вид:

$$\begin{cases} m\dot{V} = P - fN \frac{|V - r\omega| + \Delta}{|V - r\omega| + br|\omega| + \Delta}, \\ I\dot{\omega} = frN \frac{|V - r\omega| + \Delta}{|V - r\omega| + br|\omega| + \Delta} - \mu 2rQ \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь, вместо трех уравнений линейной системы дифференциальных уравнений (7), записаны только два уравнения движения. Но эти уравнения связаны между собой и учитывают как проскальзывание колеса относительно рельса, так и величину скорости проскальзывания — что весьма существенно при описании торможения. Система уравнений (8) является нелинейной и физически более содержательной.

6. Задача о скольжении стержня по шероховатой поверхности в «неправильном» направлении (трость Бегена) (рис. 11). Общепринятые дифференциальные уравнения движения для стержня будут такими ($F = fN$) [16]:

$$\begin{cases} I\ddot{\phi} = \frac{l}{2}(F \sin \phi - N \cos \phi); \\ m\ddot{x}_c = F; \\ m\ddot{y}_c = N - mg, \end{cases} \quad (9)$$

где m, I . соответственно масса и осевой момент инерции стержня; $C(x_c, y_c)$ — центр масс стержня.

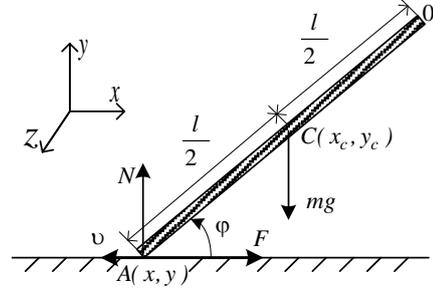


Рис. 11. Стержень, скользящий по шероховатой поверхности (трость Бегена)

Учитывая, что:

$$x_c = x + \frac{l}{2} \cos \phi, \quad \ddot{x}_c = \ddot{x} - \frac{l}{2} \ddot{\phi} \sin \phi - \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \cos \phi;$$

$$y_c = x + \frac{l}{2} \sin \phi, \quad \ddot{y}_c = \ddot{y} + \frac{l}{2} \ddot{\phi} \cos \phi - \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin \phi;$$

получим:

$$\ddot{y} = \frac{N}{m} - g + \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{l^2}{4I} \cos \phi (F \sin \phi - N \cos \phi), \quad (10)$$

или:

$$\ddot{y} = \frac{N}{m} - g + \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{l^2}{4I} \cos^2 \phi (ftg \phi - 1) =$$

$$\frac{N}{m} \left[1 - \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \phi (ftg \phi - 1) \right] - g + \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin \phi.$$

Откуда следует, что при $\ddot{y} = 0$:

$$N = \frac{m \left(g - \frac{l}{2} \dot{\phi}^2 \sin \phi \right)}{1 - \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \phi (ftg \phi - 1)}. \quad (11)$$

Замечено, что при:

$$y_c = 0, \quad \ddot{y}_c = 0, \quad \dot{\phi} = 0, \quad \frac{I}{ml^2} \ll 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}:$$

$$1 - \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \phi (ftg \phi - 1) < 0 \Rightarrow N < 0.$$

что принято называть парадоксом Пенлеве, так как случай, когда $N < 0$, не соответствует реальности.

Новый подход дает такое решение. Сила трения F определяется согласно формуле (1) при $v = \dot{x}; \omega = \dot{\phi}; \Omega = 0; r = l$:

$$F = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bl\dot{\phi} + \Delta}.$$

Значение коэффициента $F_0 = F|_{\dot{\varphi}=0}$ определяется из двух возможных начальных кинематических состояний стержня: а) стержень держат в точке О, и он не движется; в) стержень держат в точке О и двигают его поступательно вдоль опорной плоскости (трость Бегена).

Равенство (10) принимает вид:

$$\ddot{y} = \frac{N}{m} - g + \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \frac{l^2}{4I} \cos \varphi \left(F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bl\dot{\varphi} + \Delta} \sin \varphi - N \cos \varphi \right).$$

Откуда следует, что при $\ddot{y} = 0$:

$$N = \frac{m \left(g - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{F_0 l^2}{4I} \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bl\dot{\varphi} + \Delta} \sin \varphi \cos \varphi \right)}{1 + \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \varphi}. \quad (12)$$

Формулы — как (11), так и (12) — говорят о зависимости силы реакции от мгновенной угловой скорости $\dot{\varphi}$, что может приводить к вибрациям конца стержня в точке А во время движения, а также о возможности принятия ею нулевого значения. При нулевом значении реакции будет происходить кратковременный отрыв конца стержня от опорной плоскости. Такая возможность, в частности, объясняет отскоки кусочка мела от доски при вычерчивании, например, окружности в виде прерывистой линии, при $\dot{\varphi} \neq 0$.

При $y_c = 0, \ddot{y}_c = 0, \dot{\varphi} = 0, \frac{I}{ml^2} \ll 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ получим:

$$N = \frac{m \left(g + \frac{F_0 l^2}{4I} \sin \varphi \cos \varphi \right)}{1 + \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \varphi}. \quad (13)$$

Для решения вопроса о существовании парадокса Пенлеве рассмотрим подробнее два начальных кинематических состояния стержня:

а) стержень держат в верхней точке О, и он неподвижен. Тогда из условия баланса моментов относительно точки О получим, что $N = \frac{mg}{2}$. Тем самым

$F_0 = F|_{\dot{\varphi}=0} = f \frac{mg}{2}$, и формула (12) примет вид:

$$N = \frac{m \left(g + \frac{mgl^2}{8I} \sin \varphi \cos \varphi \right)}{1 + \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \varphi} > 0, \quad (14)$$

что говорит об отсутствии парадокса Пенлеве в этом случае;

в) стержень держат в верхней точке О и двигают поступательно вдоль опорной плоскости (трость Бегена). Здесь из условия баланса моментов относительно

точки О следует, что $N = \frac{mg}{1 - ftg\varphi_0}$, где φ_0 — начальный угол наклона стержня. Для осуществления поступательного скольжения стержня необходимо, чтобы:

$ftg\varphi_0 = f / tg \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \leq 1$, т. е. угол наклона стержня к

вертикали $\frac{\pi}{2} - \varphi_0$ не должен быть внутри конуса тре-

ния. Случай, когда $f / tg \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) = 1$, следует отбросить, так как в этом случае для баланса моментов относительно точки О стержень должен быть невесом, а падение стержня может происходить только под действием силы тяжести. Тем самым,

$F_0 = F|_{\dot{\varphi}=0} = f \frac{mg}{1 - ftg\varphi_0} > 0$, и формула (13) примет

вид:

$$N = \frac{m \left[g + \frac{fmg l^2}{8I(1 - ftg\varphi_0)} \sin \varphi \cos \varphi \right]}{1 + \frac{ml^2}{4I} \cos^2 \varphi} > 0, \quad (15)$$

что говорит об отсутствии парадокса Пенлеве и в этом случае.

Заметим, что Давид Е. Стюард в своей монографии [16] пытался решить вопрос о парадоксе Пенлеве для данной системы путем введения импульсных сил.

7. Буксование колес локомотива на месте в начале движения, в момент придания им большой угловой скорости вращения, что принято объяснять уменьшением коэффициента трения с ростом скорости проскальзывания. Согласно новой теории, это следует из вида формулы для силы трения скольжения (2), которая показывает убывание силы трения и при постоянном коэффициенте трения [23].

8. Возможное возникновение вибрации колес (например, автомобиля или велосипеда) при торможении никак не подтверждает постоянство силы трения при проскальзывании, что следовало бы из закона Кулона. А новый вид этой силы (1), зависящий от кинематических скоростей, наоборот подтверждает возможность таких вибраций.

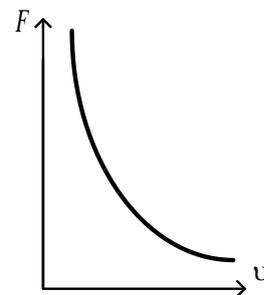


Рис. 12. Экспериментальная характеристика трения для фрикционно-теплоустойчивых тел [5]

9. Экспериментальная характеристика трения для фрикционно-теплоустойчивых тел, полученная на установках, где одно из тел пары совершает вращательное движение, имеет вид равнобочной гиперболы

[5] (рис. 12), а при справедливости закона Кулона характеристика должна быть горизонтальной прямой. Такое несоответствие не находило объяснений. Согласно новой теории, гиперболическая зависимость на рис. 10 объясняется очень просто — как следствие формулы (2), учитывающей непоступательное движение соприкасающихся тел на существующих экспериментальных установках [26].

О парадоксах Пенлеве. Приведенные решения парадоксов Пенлеве с помощью нового подхода также говорят о том, что в случаях непоступательного скольжения тел закон Кулона напрямую не применим. Автором были решены парадоксы Пенлеве для таких классических систем, как тормозная колодка, вдавливание вращающегося диска постоянной силой в угол, скольжение стержня вдоль шероховатой поверхности в «неправильном» направлении (трость Бегена).

Решение указанных классических парадоксов говорит о том, что, похоже, новая теория дает ключ к решению и других парадоксов Пенлеве, когда тела совершают не поступательное движение относительно друг друга.

О применении закона Кулона в неголономной механике. В неголономной механике также никто не отменял соблюдение необходимого условия при использовании закона Кулона — что часто нарушается. Последнее ставит под сомнение существующие результаты, где методы неголономной механики применялись для случаев, когда закон Кулона напрямую неприменим. В частности, для задач качения колеса (например, приведенные в [2]) или шара.

Интересно заметить, что если при непоступательном движении тел применять новую теорию для нахождения компонент сил сухого трения, что необходимо для корректного применения закона Кулона, то получается, что надобность в методах неголономной механики для таких задач отпадает.

Заключение.

Полученные результаты говорят о следующем.

1. На конкретных примерах показано, что применение закона Кулона без соблюдения необходимого условия для этого может приводить либо к получению недостоверных решений в виде парадоксов Пенлеве, либо к искажению результатов как на качественном уровне, так и на количественном. Соблюдение необходимого условия должно выполняться и при использовании закона Кулона в дифференциальном виде.

2. Использование эффекта Жуковского для преобразования сухого трения тоже предполагает соблюдение необходимого условия — такого же, как при использовании закона Кулона. В случаях не поступательного движения тел сила трения скольжения и вектор абсолютной скорости могут быть направлены не по одной прямой, что лишает оснований применение эффекта Жуковского.

3. Применение новой теории, основанной на методе кинематических зон, позволяет получить такие результаты:

a) принципиально новое описание движения и процессов торможения для колесных систем — силы тре-

ния учитывают угловую скорость колеса, возможность наличия и величину скорости проскальзывания;

b) принципиально новое моделирование процессов вращательно-поступательного погружения или извлечения стержня (трубы) в сопротивляющейся среде (грунте) — эффект Жуковского здесь неприменим;

c) при классическом подходе к проведению расчетов машин и механизмов значения для компонент сил трения получались завышенными — в цапфах, подшипниках, фрикционных передачах и т. д. Существующие методы не учитывали комбинированную кинематику движения тел, а закон Кулона использовался напрямую, как в случае простого движения. Фактически для соответствующих компонент сил трения брались их максимальные значения, что можно рассматривать как огрубленное, начальное приближение к действительности. Появилась возможность проведения более точных расчетов при проектировании машин и механизмов;

d) обрабатывать снимаемые характеристики трения на существующих экспериментальных установках, где одно из двух тел пары совершает вращательное движение, с помощью закона Кулона напрямую недопустимо [26] — здесь следует использовать формулы новой теории, основанной на методе кинематических зон;

e) новая теория, по-видимому, является ключом к решению парадоксов Пенлеве для всех известных механических систем, в том числе и классических, где тела движутся не поступательно по отношению друг к другу. Это наглядно показано автором на таких известных системах, как тормозная колодка, вдавливание вращающегося диска постоянной силой в угол, скольжение стержня вдоль шероховатой поверхности в «неправильном» направлении (трость Бегена);

f) ранее полученные результаты для таких задач нуждаются в уточнениях, независимо от того, какие методы использовались — голономной или неголономной механики.

***Замечание.** В моей недавней работе [25] при объяснении парадокса Пенлеве для тормозной колодки авторство гипотезы удара трением несправедливо приписывалось В.А. Самсонову. Выражаю благодарность В.А. Самсонову, который указал, что автором данной гипотезы является русский ученый Е.А. Болотов. Тем не менее, по моему мнению, гипотеза об ударе трением не играет в данном вопросе определяющего значения, о чем уже упоминалось в данной статье.*

Автор

Литература

1. Колчин Н.И. Механика машин. В 2 т. М.; Л.: Машгиз, 1963. Т. 2. 536 с.
2. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 272 с.
3. Мур Д. Основы и применения трибоники. М.: Мир, 1978. 488 с.
4. Основы трибологии (трение, износ, смазка) / под ред. А.В. Чичинадзе. М.: Машиностроение, 2001. 664 с.

5. Чичинадзе А.В. Расчет и исследование внешнего трения при торможении. М.: Наука, 1967. 232 с.
6. Крагельский И.В. Трение и износ. Изд. 2-е перераб и доп. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
7. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика»: Ин-т компьютерных исслед., 2010. 164 с.
8. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement depivotement dans la theorie de la toupie // Kreiselprobleme Hydrodynamics: Symposium, Celerina. Berlin: Springer, 1963. P. 201–216.
9. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
10. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474, № 3. С. 301–302.
11. Журавлев В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2(113). С. 77–85.
12. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 366–375.
13. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7–33.
14. Бутенин Н.В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, № 1. С. 3–32.
15. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве-Клейна: о парадоксе Пэнлеве // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 1991. № 4. С. 48–53.
16. Давид Е. Стюард. Динамика систем с неравенствами. Удары и жесткие связи. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2013. 544 с.
17. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и «удар трением» // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 912–921.
18. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Избранные задачи механики с сухим трением. М.: Физматлит, 2013. 200 с.
19. Коронатов В.А. Обобщение качественно новой теории качения колеса при описании явления шимми // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 1(37). С. 45–55.
20. Коронатов В.А. Новый вариант теории движения колеса на примере описания явления шимми // Проблемы механики современных машин: материалы VII Междунар. науч. конф. М., 2018. С. 209–215.
21. Коронатов В.А. Представление новой теории качения колеса на примере описания движения ведомого колеса локмотива (автомобиля) // Современные технологии // Системный анализ. Моделирование. 2018. № 1(57). С. 49–60.
22. Коронатов В.А. Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3(39). С. 24–32.
23. Коронатов В.А. Ошибка А. Зоммерфельда и о дискуссии применимости голономной механики для задач качения // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 4(40). С. 20–26.
24. Коронатов В.А. О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу – Журавлева // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 21–28.
25. Коронатов В.А. Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2(42). С. 44–48.
26. Коронатов В.А. О корректном применении закона Кулона при использовании экспериментальных характеристик трения. Аппроксимация кривой Штрибека // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 3(43). С. 35–43.
27. Иванова Т.Б., Ермакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 421–424.
28. Цейтлин М.Г., Верстов В.В., Азбель Г.Г. Вибрационная техника и технология свайных и буровых работ. Л.: Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. 262 с.
29. Нагаев Р.Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
30. Коронатов В.А. Начала построения строгой теории бурения // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 4(32). С. 83–94.
31. Коронатов В.А. Элементы строгой теории бурения // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17): материалы VI Междунар. конф. М., 2017. С. 221–226.
32. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 384 с.
33. Розенблат Г.М. Механические системы с сухим трением. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика»: Ин-т компьютерных исслед., 2006. 204 с.

References

1. Kolchin N.I. Mechanics of cars. V 2 t. M.; L.: Mashgiz, 1963. Vol. 2. 536 p.
2. Levin M.A., Fufaev N.A. The theory of rolling of a deformable wheel. M.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 272 p.
3. Mur D. Fundamentals and applications of tribonics. M.: Mir, 1978. 488 p.
4. Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication). / pod red. A.V. Chichinadze. M.: Mashinostroenie, 2001. 664 p.
5. Chichinadze A.V. Calculation and study of external friction during braking. M.: Nauka, 1967. 232 p.
6. Kragel'skiy I.V. Friction and wear. Izd. 2-e pererab i dop. M.: Mashinostroenie, 1968. 480 p.
7. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika»: In-t komp'yuternyh issled., 2010. 164 p.
8. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement depivotement dans la theorie de la toupie // Kreiselprobleme Hydrodynamics: SHTAM Symposium, Celerina. Berlin: Springer, 1963. P. 201–216.
9. Penleve P. Lectures on friction. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.
10. Zhuravlev V.F. On the "paradox" of the brake pads // Doklady Akademii nauk. 2017. Vol. 474, № 3. P. 301–302.
11. Zhuravlev V.F. Incorrect tasks of mechanics // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering. 2017. № 2 (113) P. 77–85.
12. Nejmark Yu.I., Fufaev N.A. Painlevé paradoxes and brake pad dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Vol. 59, № 3. P. 366–375.
13. Nejmark Yu.I., Smirnova V.N. On the centenary of the Painlevé paradox // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie. 2001. № 2. P. 7–33.
14. Butenin N.V. Examination of “degenerate” dynamical systems using the “jump” hypothesis // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12, № 1. P. 3–32.
15. Fufaev N.A. System dynamics in the Painlevé-Klein example: on the Painlevé paradox // Mechanics of Solids. 1991. № 4. P. 48–53.
16. David E. Styuard. Dynamics of systems with inequalities. Blows and hard links. M.; Izhevsk: In-t komp'yuternyh issled., 2013. 544 p.

17. Samsonov V.A. Dynamics of the brake pad and “friction impact” // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005. Vol. 69, № 6. P. 91–921.
18. Sumbatov A.S., Yunin E.K. Selected problems of mechanics with dry friction. M.: Fizmatlit, 2013. 200 p.
19. Koronotov V.A. A generalization of a qualitatively new theory of wheel rolling in the description of the shimmy phenomenon // *Systems. Methods. Technologies*. 2018. № 1 (37). P. 45–55.
20. Koronotov V.A. A new version of the theory of co-forest movement using the example of the description of the shimmy phenomenon. In the collection: *Problems of the mechanics of modern machines: materialy VII Mezhdunar. nauch. konf. M.*, 2018. P. 209–215.
21. Koronotov V.A. Presentation of a new theory of wheel rolling on the example of a description of the movement of a driven wheel of a loco-motive (car) // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2018. № 1 (57). P. 49–60.
22. Koronotov V.A. A general approach to determining the resistance forces during rolling, sliding of bodies with spinning, drilling, penetration, drilling and smoothing // *Systems. Methods. Technologies*. 2018. № 3 (39). P. 24–32.
23. Koronotov V.A. Oshibka A. The mistake of A. Sommerfeld and the discussion of the applicability of holonomic mechanics to rolling problems // *Systems. Methods. Technologies*. 2018. № 4 (40). P. 20–26.
24. Koronotov V.A. On dry friction with inaccessible gliding of the body and criticism of the Contensu-Zhuravlev theory // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 1(41). P. 21–28.
25. Koronotov V.A. The Painlevé paradox finale for the brake pads // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 2(42). P. 44–48.
26. Koronotov V.A. On the correct application of the Coulomb law when using the experimental characteristics of friction. Approximation of the Stribek Curve // *Systems. Methods. Technologies*. 2019. № 3(43). P. 35–43.
27. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev YU.L. Experimental study of the brake pad // *Doklady Akademii nauk*. 2016. Vol. 471, № 4. P. 421–424.
28. Cejtlin M.G., Verstov V.V., Azbel' G.G. Vibration equipment and technology of pile and drilling operations. L.: Strojizdat, Leningr. otd-nie, 1987. 262 p.
29. Nagaev R.F. Periodic modes of vibrational movement. M.: Nauka, 1978. 160 p.
30. Koronotov V.A. The beginning of the construction of a rigorous theory of drilling // *Systems. Methods. Technologies*. 2016. № 4(32). P. 83–94.
31. Koronotov V.A. Elements of a rigorous theory of drilling // *Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO17): materialy VI Mezhdunar. konf. M.*, 2017. P. 221–226.
32. Panovko YA.G., Gubanova I.I. Stability and vibration of elastic systems: Modern concepts, errors and paradoxes. M.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1979. 384 p.
33. Rozenblat G.M. Mechanical systems with dry friction. M.: Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika»: In-t komp'yuternyh issled, 2006. 204 p.