

Оценка статистики критериев Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова для проверки гипотезы нормальности распределения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica Led.*, измеренного с округлением

С.В. Ушанов^а, В.М. Ушанова^б

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М.Ф. Решетнёва,
пр. «Красноярский рабочий» 31, Красноярск, Россия

^аushanov_sv@mail.ru, ^бushanova_vm@mail.ru

^а<https://orcid.org/0000-0003-2648-5918>,

^б<https://orcid.org/0000-0002-9092-4156>

Статья поступила 2.06.2019, принята 28.06.2019

*В статье рассмотрено применение критериев согласия Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова для проверки сложной гипотезы о соответствии теоретического (нормального) и эмпирического распределений содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica Led.* Рассматривается важный для практики случай, когда параметры распределения вычисляются методом максимального правдоподобия, а экспериментальные данные известны с округлением. Это соответствует реальным условиям проведения многих экспериментов. Округление данных приводит к смещению интегральной функции распределения критериев согласия вправо и увеличению критических значений по сравнению с экспериментальными данными, известными без округлений. Гипотеза соответствия распределений отвергается, если при заданном уровне значимости критическое значение меньше расчетного. Неучет округления данных при оценке критических значений может привести к необоснованному отклонению гипотезы согласованности распределений. Таблицы критических значений в рассматриваемых условиях проверки сложной гипотезы фрагментарны или отсутствуют. Статистика критериев Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова оценивается методом статистических испытаний по результатам 100 тыс. вычислительных экспериментов, при этом точность расчета критических значений рассматриваемых критериев выше 0.001. При решении этой задачи проводится оценка статистики и области изменения параметров распределения. Оценка параметров распределения проводится методом максимального правдоподобия. Объем экспериментальной выборки равен 30. Вычисления проводились в компьютерных системах MathCad и MatLab. Приведены результаты вычислительных экспериментов по оценке статистики, расчетных и критических значений критериев согласия и параметров распределения при измерении экспериментальных данных с точностью 0.01, 0.2, 0.5 % к массе абсолютно сухого сырья. Представлена визуализация полученных результатов.*

Ключевые слова: метод максимального правдоподобия; критерий Фроцини; критерий «омега-квадрат»; критерий Колмогорова – Смирнова; метод статистических испытаний; эфирное масло; *Abies Sibirica Led.*

Evaluation of Frocini's, Kolmogorov-Smirnov's and «omega-square» criteria statistics for testing the hypothesis of normal distribution of the content of essential oil in the seedlings of the young *Abies Sibirica Led* measured with rounding

S.V. Ushanov^а, V.M. Ushanova^б

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology; 31, Krasnoyarsky Rabochoy Ave., Krasnoyarsk, Russia

^аushanov_sv@mail.ru, ^бushanova_vm@mail.ru

^а<https://orcid.org/0000-0003-2648-5918>,

^б<https://orcid.org/0000-0002-9092-4156>

Received 2.06.2019, accepted 28.06.2019

*The article considers the application of Frocini's, Kolmogorov-Smirnov's and "omega-square" criteria of agreement to testing the complex hypothesis of compliance of the theoretical (normal) and empirical distributions of the content of essential oils in the seedlings of the young *Abies Sibirica Led* measured with rounding. An important case for practice is considered when the distribution parameters are calculated by the maximum likelihood method, and the experimental data are known with rounding. This corresponds to the real*

conditions of many experiments. Rounding of the data leads to a shift to the right of the integral distribution function of the goodness of fit criteria and an increase in the critical values, compared with experimental data known without rounding. The hypothesis of correspondence of distributions is rejected if at the given level of significance the critical value is less than the calculated value. Not accounting for rounding of data in the assessment of critical values may lead to unnecessary rejection of hypothesis of consistency of the distributions. Tables of critical values, under the conditions of testing a complex hypothesis, are fragmentary or absent. Statistics of Frocini's, Kolmogorov-Smirnov's and "omega-square" criteria are estimated by the method of statistical tests on the results of 100,000 computational experiments. The accuracy of the calculation of the critical values of the criteria under consideration is higher than 0.001. In solving this problem, the statistics and the area of variation of the distribution parameters are evaluated. The distribution parameters are estimated by the maximum likelihood method. The number of experiments (sample size) is 30. Calculations were carried out in computer systems MathCad and MATLAB. The presents the results of computational experiments for estimate the statistics, calculated and critical values of the goodness of fit criteria and distribution parameters in the measurement of experimental data with an accuracy of 0.01, 0.2, 0.5 % by weight of absolutely dry raw materials. Visualization of the results is presented.

Keywords: maximum likelihood method; Frocini's criterion; "omega-square" criterion; Kolmogorov – Smirnov's criterion; method of statistical tests; essential oils; *Abies Sibirica* Led.

Введение

Пихта сибирская *Abies Sibirica* Led. является одной из главных лесообразующих пород Сибири. При комплексной переработке древесной зелени и коры пихты применяются технологии химической переработки с получением биологически активных продуктов [1–4]. Потребительские свойства получаемых продуктов зависят от индивидуальной изменчивости содержания эфирного масла и условий произрастания деревьев [1; 2; 5–7].

При проведении экспериментов отбирали охвоенные побеги в средней части кроны 30-ти нормально развитых деревьев молодняка *Abies Sibirica* Led. Для исключения межпопуляционной изменчивости отбор проводили в западной (около 80 км от Красноярска) части красноярской лесостепи. В лабораторных условиях пробы (древесная зелень с диаметром в отрубе 10 мм) измельчали, усредняли и определяли влажность.

Эфирное масло из древесной зелени отгоняли в аппаратах Клевенджера. Содержание эфирного масла находили волюмометрическим способом, обеспечивающим циркуляцию флорентинной воды [2]. Выход масла рассчитывали на абсолютно сухую массу сырья.

Одна из практически значимых задач анализа экспериментальных данных связана с оценкой параметров теоретической функции распределения. К наиболее распространенным методам решения этой задачи относится метод максимального правдоподобия (ММП) [8–10]. ММП-оценки параметров распределения определяются решением задачи (1):

$$F_{\text{MP}}(X, a) = \sum_{i=1}^n \ln(d(X_i, a)) \rightarrow \max_a, \quad (1)$$

где $F_{\text{MP}}(X, a)$ — критерий оптимальности ММП; $d(X_i, a)$ — плотность вероятности элемента распределения X_i ; X — выборочные значения случайной величины; n —

объем выборки; i — номер элементов X ; a — параметры распределения.

Альтернативой ММП-оценкам являются MD-оценки параметров распределения (оценки минимального расстояния), получаемые минимизацией расчетных значений статистических критериев согласия [11–15].

В работе рассматриваются критерии согласия Фроцини (2) [15–17], «омега-квадрат» (3) [11; 15; 18; 19], Колмогорова – Смирнова (4) [20; 21]. Статистика распределения этих критериев при проверке сложной гипотезы зависит от объема выборки, способов формирования данных, оценки параметров распределения [8; 11; 14] и может быть оценена методом статистических испытаний [8; 11–15; 22].

$$F_{\text{Fr}}(Xv, a) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sum_{i=1}^n \left| F(Xv_i, a) - \frac{i-0.5}{n} \right|, \quad (2)$$

$$F_{\omega}(Xv, a) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F(Xv_i, a) - \frac{i-0.5}{n} \right)^2, \quad (3)$$

$$F_{\text{KS}}(Xv, a) = \max \left(\max_i \left(\frac{i}{n} - F(Xv_i, a) \right), \max_i \left(F(Xv_i, a) - \frac{i-1}{n} \right) \right), \quad (4)$$

где $F_{\text{Fr}}(Xv, a)$, $F_{\omega}(Xv, a)$, $F_{\text{KS}}(Xv, a)$ — расчетное значение критериев Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова; Xv — вариационный ряд случайной величины X ; n — объем выборки; i — номер элемента вариационного ряда; $F(Xv_i, a)$ — значение интегральной функции распределения для i -го элемента вариационного ряда; Xv_i, a — параметры распределения.

Расчеты проводились в компьютерных системах MathCad и MatLab. ММП-оценки параметров нормальных распределений получены стандартными функциями этих систем [22].

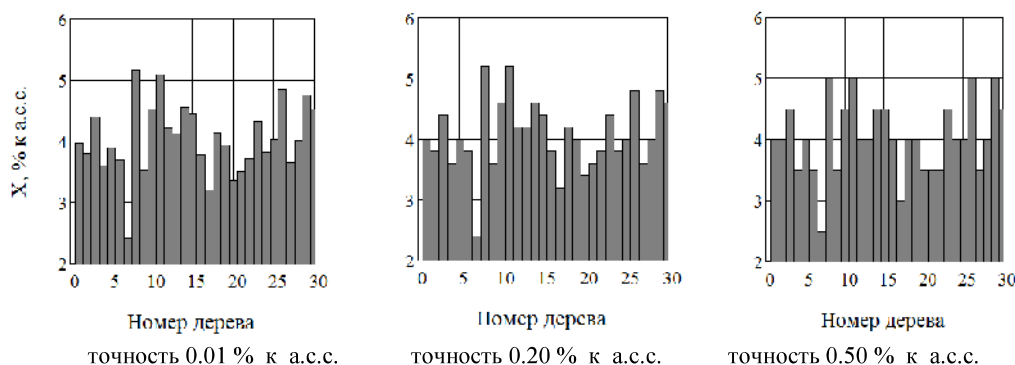


Рис. 1. Экспериментальные данные о содержании эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica* (X), полученные с округлением 0,01, 0,2 и 0,5 % к массе абсолютно сухого сырья (а.с.с.)

Обсуждение результатов. На рис. 1 представлены экспериментальные данные о содержании эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica*, полученных с округлением 0,01, 0,2 и 0,5 % к массе абсолютно сухого сырья (а.с.с.). Эмпирические и теоретические (нормальные) интегральные функции распределений приведены на рис. 2. Оценка параметров

распределения (математического ожидания и стандартного отклонения) проводилась методом максимального правдоподобия. Объем выборки равен 30.

Результаты проверки нормальности распределения эмпирических данных по критериям Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова при разной точности измерения представлены в табл. 1.

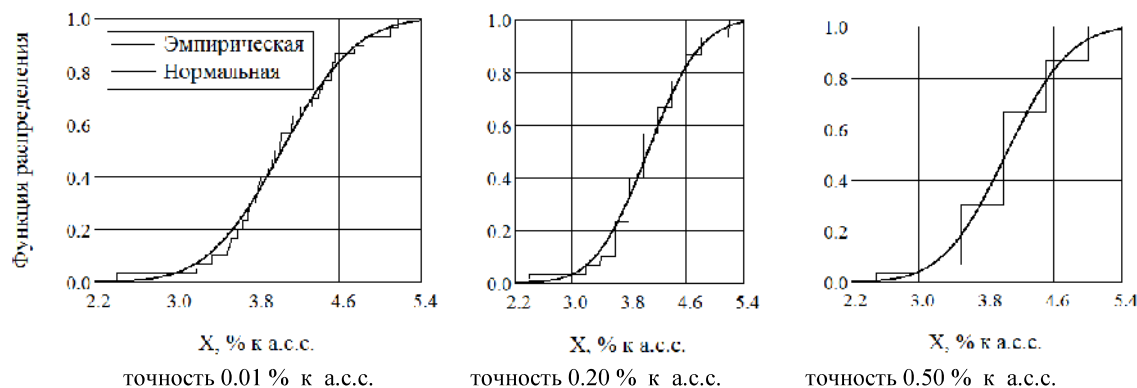


Рис. 2. Нормальная и эмпирическая функции распределения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica* (X), полученные с округлением 0,01, 0,2 и 0,5 % к массе абсолютно сухого сырья

Таблица 1

Влияние на результаты проверки нормальности распределения эмпирических данных по критериям Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова точности измерения экспериментальных данных содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка Abies Sibirica

Критерий	Показатель	Точность экспериментальных данных, % от массы а.с.с.				
		0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
ММП	Математическое ожидание, X_c	4.04	4.04	4.03	4.03	4.03
ММП	Стандартное отклонение, S_c	0.57	0.57	0.57	0.58	0.59
Фроцини	Расчетное значение, $F_{грac}$	0.127	0.133	0.151	0.182	0.340
Фроцини	Критическое значение при $\alpha = 0.05$	0.284	0.285	0.291	0.312	0.462
Фроцини	Уровень значимости, для $F_{грac}$	0.882	0.863	0.810	0.827	0.670
«Омега-квадрат»	Расчетное значение, F_{wpac}	0.025	0.028	0.038	0.055	0.185
«Омега-квадрат»	Критическое значение при $\alpha = 0.05$	0.125	0.127	0.134	0.160	0.354
«Омега-квадрат»	Уровень значимости, для F_{wpac}	0.925	0.907	0.828	0.833	0.671
Колмогорова – Смирнова	Расчетное значение, F_{kspac}	0.076	0.079	0.088	0.112	0.189
Колмогорова – Смирнова	Критическое значение при $\alpha = 0.05$	0.159	0.162	0.172	0.195	0.270
Колмогорова – Смирнова	Уровень значимости для F_{kspac}	0.950	0.939	0.913	0.845	0.686

Критические значения в рассматриваемых условиях проверки сложной гипотезы фрагментарны или отсутствуют.

Оценки статистики критериев Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова получены методом статистических испытаний по результатам 100 тыс. вычислительных экспериментов. В этом случае при

уровнях значимости $\alpha \in [0.001, 0.999]$ ошибка оценки критических значений критериев меньше 0.001.

Уменьшение точности измерения экспериментальных данных приводит к смещению интегральных функций распределения критериев вправо и увеличению расчетных и критических значений при заданном уровне значимости (рис. 3).

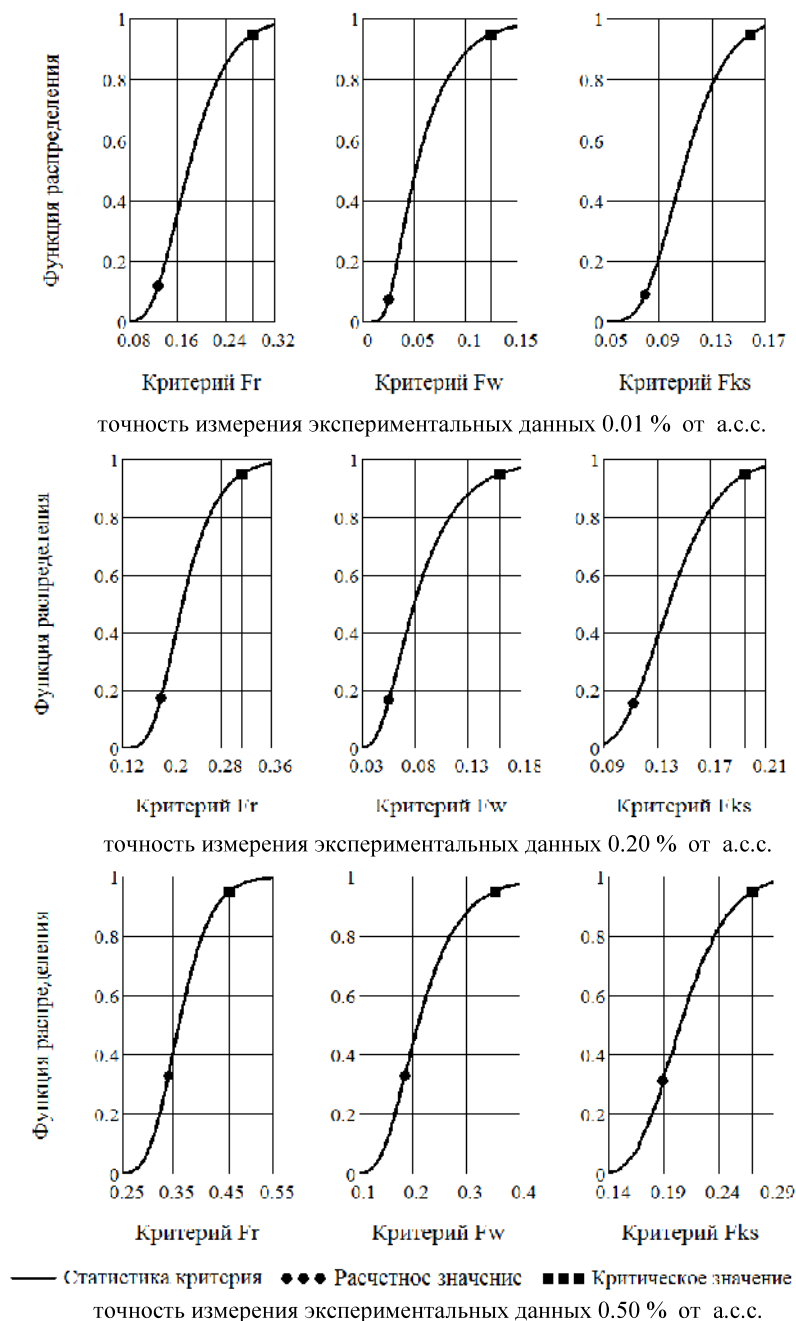


Рис. 3. Результаты проверки по критериям Фроцини (Fr), «омега-квадрат» (Fw), Колмогорова – Смирнова (Fks) гипотезы нормальности распределения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica* при различной точности измерения результатов экспериментов

Снижение точности измерения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica* с 0.01 до 0.5 % от массы а.с.с. имеет следствием:

увеличение расчетных значений критериев: Фроцини — с 0.127 до 0.340 (2.7 раза), «омега-квадрат» — с 0.025 до 0.185 (7.4 раза), Колмогорова – Смирнова — с 0.076 до 0.189 (2.5 раза);

увеличение критических значений критериев при уровне значимости 0.05: Фроцини — с 0.284 до 0.462 (1.6 раза), «омега-квадрат» — с 0.125 до 0.354 (2.8 раза), Колмогорова – Смирнова — с 0.159 до 0.270 (1.7 раза);

уменьшение уровней значимости для расчетных значений критериев: Фроцини — с 0.88 до 0.67 (1.3

раза), «омега-квадрат» — с 0.92 до 0.67 (1.4 раза), Колмогорова – Смирнова — с 0.95 до 0.69 (1.4 раза).

Гипотеза соответствия распределений отвергается, если при заданном уровне значимости α расчетное значение критерия больше критического значения.

Оценка статистики критериев согласия без учета точности измерения экспериментальных данных может привести к необоснованному отклонению гипотезы соответствия теоретического (нормального) и эмпирического распределений содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica*.

В каждом вычислительном эксперименте метода статистических испытаний: генерируется массив из n псевдослучайных чисел, соответствующих распределению $N(X_c, Sc^2)$, где X_c, Sc — ММП-оценки параметров нормального распределения для экспериментальной выборки; элементы полученного массива округляются с заданной точностью; вычисляются ММП-оценки для массива округленных данных; вычисляется расчетное значение критерия согласия.

Результатам всех вычислительных экспериментов соответствует массив размерностью $M \times 3$, строки которого содержат оценки параметров распределения (математические ожидания и стандартные отклонения) и расчетные значения критериев согласия. Оценка статистики критерия согласия соответствует вариационному ряду элементов 3-го столбца этого массива.

Полученные методом статистических испытаний по критериям Фроцини (Fr), «омега-квадрат» (Fw), Колмогорова – Смирнова (Fks) оценки интегральных функций распределения математического ожидания и стандартного отклонения для различной точности измерения эмпирических данных представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

На рис. 6 представлена полученная методом статистических испытаний область изменения параметров нормального распределения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica* при различной точности измерения.

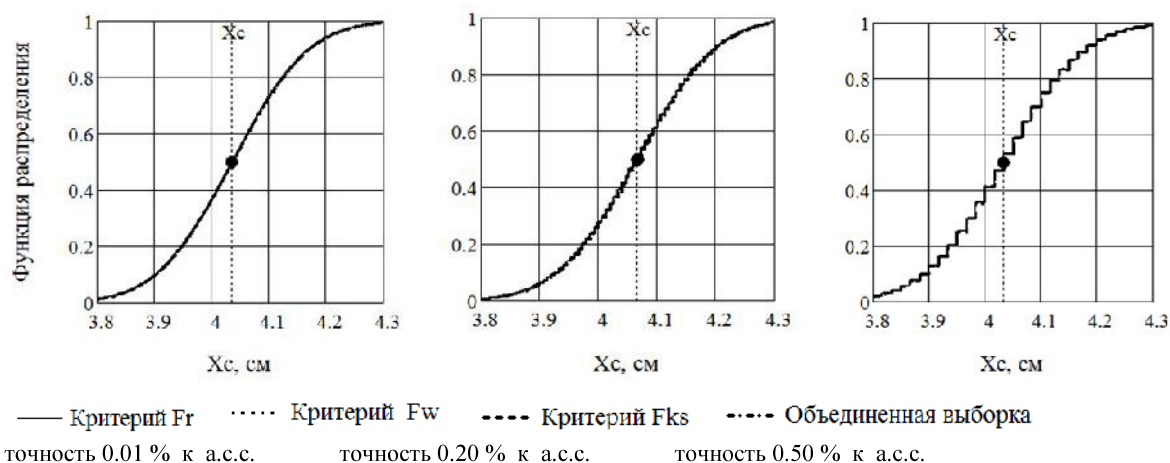


Рис. 4. Оценка методом статистических испытаний по критериям Фроцини (Fr), «омега-квадрат» (Fw), Колмогорова – Смирнова (Fks) функции распределения математического ожидания эмпирических данных (X_c) при различной точности их измерения

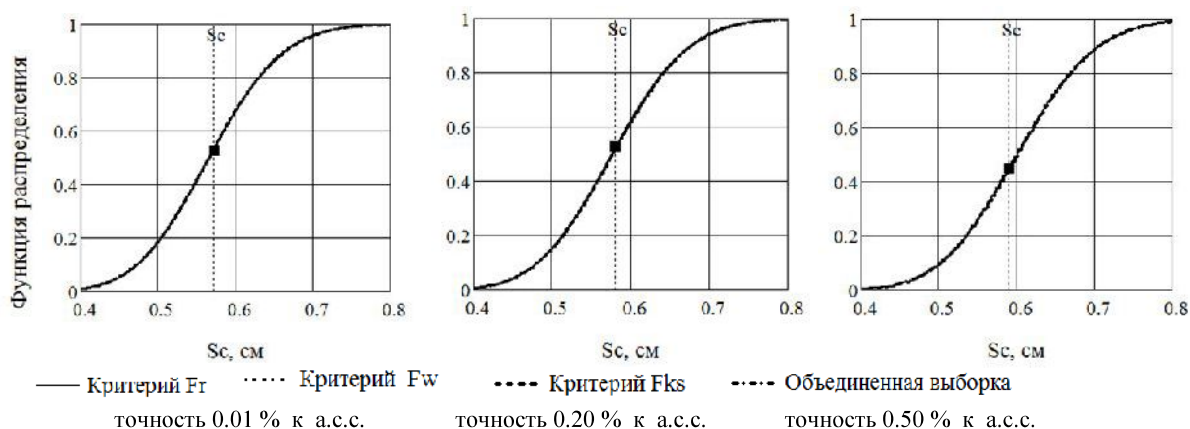


Рис. 5. Оценка методом статистических испытаний по критериям Фроцини (Fr), «омега-квадрат» (Fw), Колмогорова – Смирнова (Fks) функции распределения стандартного отклонения эмпирических данных (Sc) при различной точности их измерения

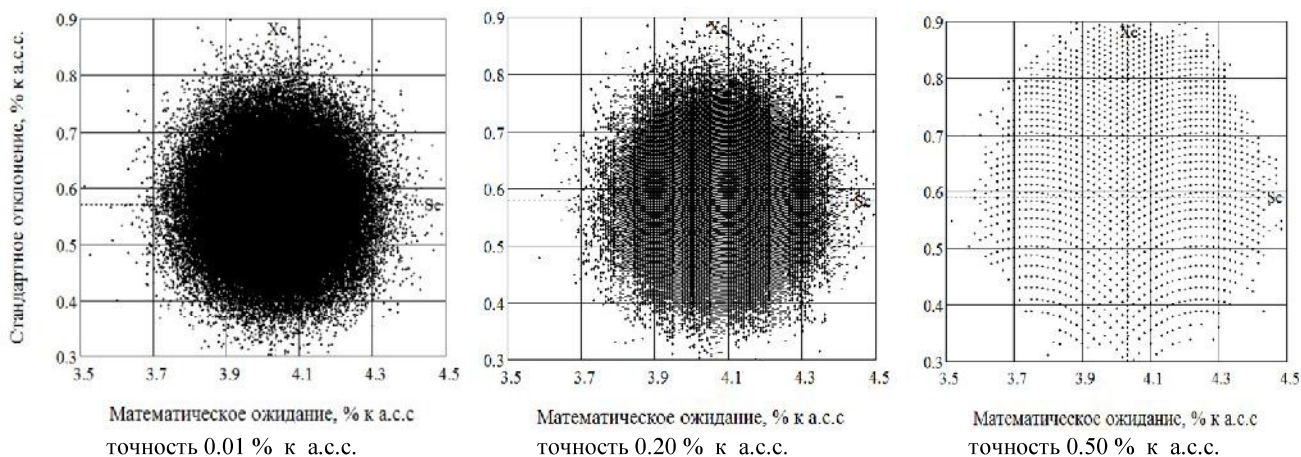


Рис. 6. Оценка методом статистических испытаний областей изменения математического ожидания (Xc) и стандартного отклонения (Sc) содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica*, полученных с округлением

Заключение

1. При планировании вычислительных экспериментов методом статистических испытаний для проверки сложной гипотезы соответствия теоретической и эмпирической функций распределения необходимо учитывать точность измерения экспериментальных данных.

2. Методом статистических испытаний получены оценки критических значений критериев Фроцини, «омега-квадрат», Колмогорова – Смирнова для проверки сложной гипотезы нормальности распределения содержания эфирного масла в охвоенных побегах молодняка *Abies Sibirica*, полученные с точностью измерения экспериментальных данных от 0.01 до 0.5 % к а.с.с.

Литература

1. Ушанова В.М., Ушанов С.В., Репях С.М. Состав и переработка древесной зелени и коры пихты сибирской. Красноярск: ЛИТЕРА-принт, 2008. 257 с.
2. Ушанова В.М. Комплексная переработка древесной зелени и коры пихты сибирской с получением продуктов, обладающих биологической активностью: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Красноярск, 2012. 34 с.
3. Ушанова В.М., Ушанов С.В. Экстрагирование древесной зелени и коры пихты сибирской сжиженным диоксидом углерода и водно-спиртовыми растворами. Красноярск: СибГТУ, 2009. 191 с.
4. Ушанова В.М., Ушанов С.В. Исследование процесса экстрагирования коры пихты сибирской сжиженным диоксидом углерода // Вестн. КрасГАУ. 2009. № 12 (39). С. 39–44.
5. Степень Р.А., Ушанова В.М., Ушанов С.В. Моделирование содержания эфирного масла в древесной зелени и коре *Abies Sibirica* различного возраста // Системы Методы Технологии. 2017. № 3 (35). С. 127-130.
6. Репях С.М., Ушанова В.М., Ушанов В.С., Ушанов С.В. Моделирование возрастной, сезонной и суточной динамики содержания эфирного масла в древесной зелени сосны обыкновенной // Химия растительного сырья. 2000. № 1. С.43-49.
7. Ушанов С.В., Степень Р.А., Ушанова В.М. Возрастная динамика содержания пихтового масла в древесной зелени *Abies Sibirica*. Теоретические аспекты оценки // Химия растительного сырья. 2017. № 1. С. 129-136.
8. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование,

исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: моногр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.

9. Ушанов С.В. Применение многомерных статистических методов при принятии решений. Красноярск: СибГТУ, 2003. 239 с.

10. Celeux G., Chauveau D., Diebolt J. On Stochastic Versions of the EM algorithm: An Experimental study in the Mixture Case, Journal of Statis. Comput. Simul. 1996. Vol. 55. P. 287-314.

11. Lemeshko B. Yu. Errors when us using nonparametric fitting criteria //Measurement Techniques, 2004. Vol. 47, № 2. P. 134-142.

12. Огурцов Д.А., Ушанов С.В. Оценка статистики критерия нормальности распределения Фроцини методом статистических испытаний //Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2017. Т. 2, № 13. С. 290–292.

13. Огурцов Д.А., Ушанов С.В. Оценка статистики критерия нормальности распределения омега-квадрат методом статистических испытаний //Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2017. Т. 2, № 13. С. 293–295.

14. Ушанов С.В., Огурцов Д.А. Оценка методом статистических испытаний статистики критерия «омега-квадрат» проверки гипотезы нормальности распределения // Современные технологии: актуальные вопросы достижения и инновации: сб. ст. XIII Междунар. науч.-практической конф. М., 2018. С. 94–97.

15. Ушанов С.В., Огурцов Д.А. Оценка методом статистических испытаний статистики критериев Фроцини и омега-квадрат для смеси нормальных распределений // Сибирский журнал науки и технологий. 2019. Т. 20, № 1. С. 28-34. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-28-34.

16. Frozini B.V. A survey of a class of goodness-of-fit statistics, Metron. 1978. Vol. 36, № 1-2. P. 3–49.

17. Frozini B.V., Sarcady K., Sen P.K., Revesz P. On the distribution and of aA survey of a class of goodness-of-fit statisticswith parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit”. Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland. Publ. Comp., 1987. P. 133-154.

18. Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. 78 с.

19. Stephens M.A. EDF statistics for goodness-of-fit and some comparisons // JASA, 1974. Vol. 69. P. 730-737.

20. Kolmogorov A.N. Sulla determinazione empirico di una legge di distribuzione // Giornale Instit. Ital. Attuari. 1933, № 4. P. 83-91.

21. Stephens M.A. Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and Related Statistics –Without Extensive Table // J.R. Stat. Soc., 1970. Vol. 32. P.115-122

22. Ушанов С.В., Огурцов Д.А. Оценка статистики критерия нормальности распределения Фрочини методом статистических испытаний в MATHCAD // Решетневские чтения. 2018. Т. 2, № 22. С. 171–173.

References

1. Ushanova V.M., Ushanov S.V., Repyah S.M. Sostav i pererabotka drevesnoj zeleni i kory pihty sibirskoj. Krasnoyarsk: LITERA-print, 2008. 257 p.

2. Ushanova V.M.. Kompleksnaya pererabotka drevesnoj zeleni i kory pihty sibirskoj s polucheniem produktov, obladayushchih biologicheskoy aktivnost'yu: avtoref. diss. ... dokt. tekhn. nauk: 05.21.03. Krasnoyarsk, 2012. 34 p.

3. Ushanova V.M., Ushanov S.V. Ekstragirovanie drevesnoj zeleni i kory pihty sibirskoj szhizhennym dioksidom ugleroda i vodno-spiritovymi rastvorami. Krasnoyarsk: SibGTU, 2009. 191 p.

4. Ushanova V.M., Ushanov S. V. Issledovanie processa ekstragirovaniya kory pihty sibirskoj szhizhennym dioksidom ugleroda //Vestnik KrasGAU, 2009, № 12 (39). Pp. 39 – 44.

5. Stepen' R.A., Ushanova V.M., Ushanov S.V. Modelirovaniye soderzhaniya efirmogo masla v drevesnoj zeleni i kore Abies Sibirica razlichnogo vozrasta //Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2017, № 3 (35). Pp. 127-130.

6. Repyah S.M., Ushanova V.M., Ushanov V.S., Ushanov S.V. Modelirovanie vozrastnoj, sezonnoj i sutochnoj dinamiki soderzhaniya efirmogo masla v drevesnoj zeleni sosny obyknovnoy // Himiya rastitel'nogo syr'ya, 2000. №. 1. Pp.43-49.

7. Ushanov S. V., Stepen' R. A., Ushanova V. M. Vozrastnaya dinamika soderzhaniya pihtovogo masla v drevesnoj zeleni Abies Sibirica. Teoreticheskie aspekty ocenki //Himiya rastitel'nogo syr'ya. 2017, № 1. Pp. 129-136.

8. Statisticheskij analiz dannyh, modelirovanie, issledovanie veroyatnostnyh zakonomernostej. Komp'yuternyj podhod: Monografiya /B. YU. Lemeshko, S. B. Lemeshko, S. N. Postovalov, E. V. Chimitova. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2011. 888 p.

9. Ushanov S.V. Primenenie mnogomernyh statisticheskikh metodov pri prinyatii reshenij. Krasnoyarsk: SibGTU, 2003. 239 p.

10. Celeux G., Chauveau D., Diebolt J. On Stochastic Versions of the EM algorithm: An Experimental study in the Mixture Case, Journal of Statis. Comput. Simul., 1996, № 155. Pp. 287-314.

11. Lemeshko B. Yu. Errors when us using nonparametric fitting criteria // Measurement Techniques, 2004. Vol. 47, № 2, Pp. 134-142.

12. Ogurcov D.A., Ushanov S.V. Ocenka statistiki kriteriya normal'nosti raspredeleniya Frocini metodom statisticheskikh ispytaniy //Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavtiki. 2017. T. 2. № 13. Pp. 290 – 292.

13. Ogurcov D.A., Ushanov S.V. Ocenka statistiki kriteriya normal'nosti raspredeleniya omega-kvadrat metodom statisticheskikh ispytaniy //Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavtiki. 2017. T.2. № 13. Pp. 293 – 295.

14. Ushanov S.V., Ogurcov D.A. Ocenka metodom statisticheskikh ispytaniy statistiki kriteriya «omega-kvadrat» proverki gipotezy normal'nosti raspredeleniya // Sovremennye tekhnologii: aktual'nye voprosy dostizheniya i innovatsii. Sbornik statej XIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. 2018. Pp. 94 – 97.

15. Ushanov S.V., Ogurcov D.A. Ocenka metodom statisticheskikh ispytaniy statistiki kriteriev Frocini i omega-kvadrat dlya smesi normal'nyh raspredelenij //Sibirskij zhurnal nauki i tekhnologii. 2019. T. 20, № 1. Pp. 28-34. Doi: 10.31772/2587-6066-2019-20-1-28-34.

16. Frozini B.V. A survey of a class of goodness-of-fit statistics, Metron. 1978. V. 36, № 1-2. Pp. 3 – 49.

17. Frozini, B.V. On the distribution and of aA survey of a class of goodness-of-fit-statisticswith parametric and nonparametric applications, “Goodness-of-fit”/Ed. by Revesz P., Sarcady K., Sen P.K., Amsterdam-Oxford-New York: North-Holland. Publ. Comp., 1987. Pp.133-154.

18. Martynov G.V. Kriterii omega-kvadrat. M.: Nauka, 1978. 78 p.

19. Stephens M.A. EDF statistics for goodness-of-fit and some comparisons // JASA, 1974. V. 69. Pp. 730-737.

20. Kolmogorov A.N. Sulla determinazione empirico di una legge di d istruzione // Giornale Instit. Ital. Attuari. 1933. № 4. Pp. 83-91.

21. Stephens M.A. Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and Related Statistics –Without Extensive Table // J. R. Stat. Soc., 1970. V.32. Pp.115-122.

22. Ushanov S.V., Ogurcov D.A. Ocenka statistiki kriteriya normal'nosti raspredeleniya Frocini metodom statisticheskikh ispytaniy v MATHCAD //Reshetnevskie chteniya. 2018. T. 2. № 22. Pp. 171 – 173.