МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 536.24 DOI: 10.18324/2077-5415-2019-3-58-62

Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], А.А. Федяев[2c]

[1]Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, Красноярск, Россия
[2]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676,
[b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Статья поступила 02.07.2019, принята 5.07.2019

В статье рассмотрен аналитический метод решения нестационарной задачи нагрева многослойного плоского тела, коэффициенты теплопроводности отдельных слоев которого представляют линейную функцию. На практике такие конструкции широко распространены в различных отраслях промышленности. Это могут быть строительные конструкции, футеровки металлургических агрегатов, элементы ядерных реакторов, двигателей внутреннего сгорания и т. д. Математическое исследование данной задачи представляет сложную проблему. Согласно предлагаемому методу многослойная конструкция заменяется эквивалентным замещающим телом с линейной зависимостью коэффициента теплопроводности от пространственной координаты. Решение задачи основано на использовании хорошо изученных функций Бесселя, которые в табличном виде широко представлены во многих известных научных отечественных и зарубежных источниках. Кроме того, они, как правило, также имеют сравнительно доступные асимптотические представления для разных диапазонов аргументов. С использованием аппарата функций Бесселя были получены простые и удобные для аналитических расчетов характеристические уравнения для определения собственных чисел, обладающие высокой точностью, вполне достаточной для инженерных расчетов. Показано, что с помощью различных функций Бесселя могут быть аналитически решены многие задачи математической физики, имеющие важное прикладное значение.

Ключевые слова: многослойная конструкция; эквивалентное замещающее тело; температурное поле; теплофизические свойства; коэффициент теплопроводности; аналитическое решение; собственные функции; собственные числа; функции Бесселя.

Analytical method of calculation of non-stationary temperature field at linear dependence of thermal conductivity coefficient on spatial coordinate

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A.A. Fedyaev[2c]

[1]Siberian Federal University; 79, Svobodny Ave., Krasnoyarsk, Russia
[2]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676,
[b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Received 02.07.2019, accepted 5.07.2019

The article considers an analytical method for solving the unsteady problem of heating a multilayer plane body, the thermal conductivity coefficients of individual layers of which represent a linear function. In practice, such designs are widespread in various industries. These can be building structures, lining of metallurgical units, elements of nuclear reactors, internal combustion engines, etc. Mathematical study of this problem is a complex problem. According to the proposed method, the multilayer structure is replaced by an equivalent replacement body with a linear dependence of the thermal conductivity coefficient on the spatial coordinate. The solution of this problem is based on the use of well-studied Bessel functions, which in tabular form are widely represented in many well-known scientific domestic and foreign sources. In addition, they also tend to have relatively accessible asymptotic representations for different argument ranges. Using the Bessel function apparatus, the characteristic equations for the determination of eigenvalues were obtained, which are quite simple and convenient for analytical calculations. It is shown that with the help of various Bessel functions many problems of mathematical physics, which have important applied value, can be analytically solved.

Keywords: multilayer structure; equivalent substituting body; temperature field; thermophysical properties; thermal conductivity coefficient; analytical solution; eigenfunctions; eigenvalues; Bessel functions.

Введение

Ранее в статьях [1; 2] проблема теплопереноса в многослойных конструкциях была рассмотрена для случая экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты. Полученные результаты показывают высокую эффективность предлагаемого метода решения. Несомненно, одним из важнейших для практических приложений является случай аппроксимации коэффициента теплопроводности линейной зависимостью. Рассмотрим решение данной задачи при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от пространственной координаты.

Постановка и решение задачи. Одна из важных теплофизических задач, имеющих безусловно прикладное значение, — это проблема теплопереноса в многослойных конструкциях [3–7]. Предлагаемый подход проиллюстрируем на примере симметричной задачи, математическая постановка которой в безразмерной форме выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}(1 + aX)\frac{\partial \vartheta}{\partial X}\ , \qquad (1)$$

$0 \le \mathrm{Fo} < \infty$; $0 \le \mathrm{X} \le 1$; $0 \le \vartheta(X, \mathrm{Fo}) \le 1$;

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial X} = 0 \ \text{ при } \ X = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial X} = -\mathrm{Bi}\vartheta \ \text{ при } \ X = 1, \qquad (3)$$

$$\vartheta(X, 0) = 1, \qquad (4)$$

где a — постоянный коэффициент $-1 < a < 1$.

Нетрудно показать, что аналитическое решение задачи (1) – (4) может быть представлено в виде бесконечного ряда [7]:

$$\vartheta(X, \mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(X) \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (5)$$

где $K_n(X)$ — некоторая искомая собственная функция данной задачи. Очевидно, что в случае, когда $a = 0$, формула (5) преобразуется в известное решение [6; 7].

При $a \ne 0$ необходимо определить собственные функции решения (5) и собственные значения [10; 11]. Для нахождения указанных характеристик проведем исследование следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left[(1 + aX)y'\right] + \mu^2 y = 0 \qquad (6)$$

совместно с дополнительными краевыми условиями:

$$y' = 0 \ \text{ при } \ X = 0, \qquad (7)$$

$$y' = -\mathrm{Bi}\, y \ \text{ при } \ X = 1. \qquad (8)$$

Если ввести новую независимую переменную:

$$Z = 1 + aX, \qquad (9)$$

то уравнение (6) примет вид:

$$y'' + \frac{1}{Z}y' + \frac{\beta^2}{4Z}y = 0, \qquad (10)$$

где:

$$\beta = \frac{2\mu}{|a|}. \qquad (11)$$

Зависимость (10) является родственной дифференциальному уравнению Бесселя [12–14]. Поэтому решением для уравнения (10) является следующая комбинация:

$$y = C\left[J_0\left(\beta\sqrt{1 + aX}\right) + BY_0\left(\beta\sqrt{1 + aX}\right)\right], \qquad (12)$$

где $J_0\left(\beta\sqrt{1 + aX}\right)$ и $Y_0\left(\beta\sqrt{1 + aX}\right)$ — функции Бесселя соответственно 1-го и 2-го рода нулевого порядка. Эти функции всесторонне изучены, и подробные их табличные значения приведены во многих справочных пособиях, например [15–17].

Естественно, что C и B, входящие в выражение (12), являются постоянными интегрирования. Постоянная B находится из условия симметрии искомого поля температуры (7), благодаря которому можно получить:

$$B = -\frac{J_1(\beta)}{Y_1(\beta)}\ , \qquad (13)$$

где $J_1(\beta)$ и $Y_1(\beta)$ — тоже функции Бесселя 1-го и 2-го рода, но 1-го порядка.

Таким образом, собственные функции рассматриваемой задачи имеют вид:

$$K_n(X) = Y_1(\beta_n)J_0\left(\beta_n\sqrt{1 + aX}\right) - J_1(\beta_n)Y_0\left(\beta_n\sqrt{1 + aX}\right), \qquad (14)$$

где $\beta_n = \dfrac{2\mu_n}{a}$.

Собственные значения μ_n, входящие в соотношение (14), определяются на основе граничного условия 3-го рода (3) изучаемой задачи. Подставляя (14) в формулу (8), несложно получить характеристическое уравнение для вычисления корней μ_n:

$$\frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right) - Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right) - Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)} = \pm\frac{\mu}{\mathrm{Bi}\sqrt{1+a}}\ . \qquad (15)$$

Рассмотрим первый частный случай, а именно $\mathrm{Bi} = 0$. Тогда вместо (15) получим более простое выражение:

$$\frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)}{Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)} = \frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}{Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}\ . \qquad (16)$$

Если $\frac{2\mu}{a} \geq 3$ (или $\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a} \geq 3$), то согласно [15] зависимость (16) приводится к алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$\mu^2 - \frac{(n-1)\pi a}{2\left(\sqrt{1+a}-1\right)}\mu + \frac{0{,}375\,a^2}{4\sqrt{1+a}} = 0\,, \qquad (17)$$

корни которого равны:

$$\mu_n = \frac{(n-1)\pi a}{4\left(\sqrt{1+a}-1\right)} + \sqrt{\frac{(n-1)^2\pi^2 a^2}{16\left(\sqrt{1+a}-1\right)^2} + \frac{0{,}375\,a^2}{4\sqrt{1+a}}}\,, \qquad (18)$$

причем $n = 2,3,\ldots$. При $n = 1$ $\mu_1 = 0$.

Если же $\mathrm{Bi} \to \infty$, т. е. граничное условие (3) вырождается в условие 1-го рода, то выражение (15) принимает вид:

$$\frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)}{Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)} = \frac{J_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}{Y_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}\,. \qquad (19)$$

Используя те же ранее названные ограничения, можно заменить формулу (19) на квадратное алгебраическое уравнение типа:

$$\mu^2 - \frac{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)a}{2\left(\sqrt{1+a}-1\right)}\mu + \frac{a^2\left(\frac{0{,}125}{\sqrt{1+a}} + 0{,}375\right)}{4\left(\sqrt{1+a}-1\right)} = 0\,. \qquad (20)$$

Решая его, получим:

$$\mu_n = \frac{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)a}{4\left(\sqrt{1+a}-1\right)} + \sqrt{\frac{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 a^2}{16\left(\sqrt{1+a}-1\right)^2} + \frac{a^2\left(\frac{0{,}125}{\sqrt{1+a}} + 0{,}375\right)}{4\left(\sqrt{1+a}-1\right)}}\,, \qquad (21)$$

где $n = 1,2,3,\ldots$.

В таблицах приведены значения первых трех корней μ_n характеристического уравнения (15) для следующих величин коэффициента a = –0,5; –0,3; –0,1; 0; 0,1; 0,3 и 0,5. При этом для предельных значений $\mathrm{Bi} = 0$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$ расчеты были проведены по аналитическим формулам (18) и (21), а для случая, когда $a = 0$, корни μ_1, μ_2 и μ_3 заимствованы из монографии [8]. При этом для $a = 0$ можно показать, что уравнение (15) преобразуется к виду:

$$\mathrm{ctg}\,\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}\,. \qquad (22)$$

Коэффициенты ряда A_n в решении (5) определяются из начального условия сформулированной задачи, которое записывается:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(X) = 1\,, \qquad (23)$$

где собственные функции $K_n(X)$ описываются уравнением (14). Исходя из свойства ортогональности функций $K_n(X)$, очевидно, что:

$$A_n = \frac{\int_0^1 K_n(X)\mathrm{d}x}{\int_0^1 K_n^2(X)\mathrm{d}x}\,. \qquad (24)$$

В частном случае, а именно, когда $a = 0$, формула (24) преобразуется к виду [8]:

$$A_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n}\,. \qquad (25)$$

Таблица 1

Значения первых трех корней характеристического уравнения $a < 0$

$$\frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right) - Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right) - Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)} = -\frac{\mu}{\mathrm{Bi}\sqrt{1+a}}$$

Bi	$a = -0.5$			$a = -0.3$			$a = -0.1$		
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	2,6938	5,3692	0	2,8885	5,7718	0	3,0613	6,1221
0,5	0,4685	2,7990	5,4245	0,5505	3,0143	5,8374	0,6210	3,2043	6,1965
1,0	0,6243	2,8935	5,4789	0,7293	3,1263	5,9001	0,8193	3,3310	6,2684
5,0	0,9991	3,3589	5,8268	1,1396	3,6575	6,3055	1,2593	3,9154	6,7197
10,0	1,1064	3,5961	6,0880	1,2500	3,9111	6,5934	1,3729	4,1820	7,0289
50,0	1,2167	3,8988	6,5306	1,3599	4,2183	7,0493	1,4834	4,4940	7,4965
100,0	1,2324	3,9450	6,6066	1,3752	4,2639	7,1245	1,4986	4,5395	7,5716
∞	1,2463	3,9928	6,6862	1,3906	4,3108	7,2025	1,5142	4,5861	7,6492

Таблица 2

Значения первых трех корней характеристического уравнения $a > 0$

$$\frac{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)-Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_0\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}{J_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)-Y_1\left(\frac{2\mu}{a}\right)J_1\left(\frac{2\mu}{a}\sqrt{1+a}\right)}=\frac{\mu}{\mathrm{Bi}\sqrt{1+a}}$$

Bi	$a = 0.1$			$a = 0.3$			$a = 0.5$		
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,2185	6,4367	0	3,3686	6,7247	0	3,5001	6,9920
0,5	0,6839	3,3765	6,5189	0,7412	3,5354	6,8140	0,7941	3,6837	7,0879
1,0	0,8993	3,5160	6,5982	0,9721	3,6863	6,9001	1,0393	3,8450	7,1802
5,0	1,3655	4,1459	7,0902	1,4620	4,3562	7,4284	1,5510	4,5510	7,7417
10,0	1,4820	4,4234	7,4174	1,5814	4,6434	7,7714	1,6733	4,8468	8,0987
50,0	1,5939	4,4703	7,8957	1,6948	4,9652	8,2597	1,7883	5,1736	8,5966
100,0	1,6091	4,7860	7,9711	1,7102	5,0112	8,3356	1,8039	5,2199	8,6731
∞	1,6247	4,8326	8,0490	1,7260	5,0580	8,4140	1,8202	5,2672	8,7517

Таблица 3

Значения первых трех корней характеристического уравнения a = 0 по А.В. Лыкову [8]

Bi	$a = 0$		
	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,1416	6,2832
0,5	0,6533	3,2933	6,3916
1,0	0,8603	3,4256	6,4372
5,0	1,3138	4,0336	6,9096
10,0	1,4289	4,3058	7,2281
50,0	1,5410	4,6202	7,7012
100,0	1,5552	4,6658	7,7764
∞	1,5705	4,7124	7,8540

Заключение

Необходимо отметить, что предлагаемый метод может быть эффективно применен для решения более сложных задач, например, когда имеет место несимметричный подвод тепла к конструкции. Кроме того, на основе применения аппроксимации зависимостей коэффициентов теплопроводности материалов слоев изучаемой конструкции решения могут быть получены и для нелинейных граничных условий.

Литература

1. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41) С. 57–60.
2. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. К расчету нестационарного температурного поля плоского тела при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от координаты // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42) С. 55-59.
3. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: Изд-во Крас. политехн. ин-та, 1974. 144 с.
4. Иванов В.В., Видин Ю.В., Колесник В.А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным теплом. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1990. 159 с.
5. Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск; СФУ, 2014. 167 с.
6. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И. Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации. Красноярск: СФУ, 2016. 167 с.
7. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. школа, 1978. 328 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
9. Карслоу Г.С. ,Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970. 712 с.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 742 с.

12. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. В 2 т. М.: ИЛ, 1949. Т. 2. 219 с.

13. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

14. Корнеев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. М.: Гл. ред. физ-мат. лит.: Наука, 1971. 283 с.

15. Абрамовиц М. и Стиган. И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 890 с.

16. Чистова Э.А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 524 с.

17. Корнеев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1960. 458 с.

References

1. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method of calculation of non-stationary temperature field at variable coefficient of thermal conductivity. Systems. Methods. Technologies. 2019. BrSU. № 1 (41). Pp. 57-60.

2. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. To the calculation of the non-stationary temperature field of a flat body at the exponential dependence of the thermal conductivity coefficient on the coordinate. Systems. Methods. Technologies. 2019. BrSU. № 2 (42). Pp. 55-59.

3. Vidin Yu.V. Engineering methods of calculation of heat transfer processes. – Krasnoyarsk. Krasnoyarsk Polytechnic Institute publ., 1974. 144 p.

4. Ivanov V. V., Vidin Yu. V., Kolesnik V. A. Processes of heating multilayer bodies by radiant-convective heat. Rostov-on-don, Rostov University publ., 1990. 159 p.

5. Vidin Yu. V., Ivanov V. V., Kazakov R. V. Engineering methods of calculation of heat transfer problems. Krasnoyarsk, SFU, 2014. 167 p.

6. Vidin Yu. V., Zlobin V. S., Ivanov D. I. Unsteady heat transfer in inhomogeneous structures of curvilinear configuration. Krasnoyarsk, SFU, 2016. 167 p.

7. Belyaev N. M. Ryadno A. A. Methods of unsteady thermal conductivity. M.: Higher school, 1978. 328 p.

8. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Higher school, 1967. 600 p.

9. Carslaw H.S.,Jaeger D.K. the thermal Conductivity of solids., Moscow: Nauka, 1964. 487 p.

10. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential Equations of mathematical physics. M.: Higher school, 1970. 712 p.

11. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. M.: Science, 1969. 742 p.

12. Watson G.N. Theory of Bessel functions, vol. 1 and 2. M.: IL, 1949. 219 p.

13. Janke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.

14. Korneev B.G. introduction to the theory of Bessel functions. M: the Main edition of physical and mathematical. lit. ed. " Nauka ", 1971. 283 p.

15. Abramowitz, M. and Stigan. I. Guide to special functions. M.: Nauka, 1979. 890 p.

16. Chistova E.A. Tables of Bessel functions from the real argument and integrals from them. Moscow: Publishing house of the USSR, 1958. 524 p.

17. Korneev B.G. Some problems of the theory of elasticity and thermal conductivity solved in Bessel functions. Moscow: State. Izd-vo Fiz-Mat. lit., 1960. 458 p.