МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 536.24 DOI: 10.18324/2077-5415-2019-2-55-59

К расчету нестационарного температурного поля плоского тела при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от координаты

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], А.А. Федяев[2c]

[1]Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, Красноярск, Россия
[2]Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676,
[b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Статья поступила 04.03.2019, принята 29.04.2019

Получено строгое аналитическое решение теплофизической задачи, связанной с определением неустановившегося температурного поля в неоднородной плоской конструкции. На практике такие системы наиболее часто являются многослойными, что существенно усложняет их математическое исследование. Основной особенностью предложенного подхода к решению поставленной проблемы является то, что вместо фактического составного изделия вводится эквивалентное замещающее тело с существенной зависимостью коэффициента теплопроводности от пространственной координаты. При этом предполагается, что наиболее приемлемой аппроксимационной функцией для этого коэффициента являются натуральные показательные кривые. С помощью этих функций можно достаточно точно описать широкий спектр краевых задач теплопроводности при переменных коэффициентах переноса. Полученное окончательное расчетное выражение для нахождения нестационарного распределения температуры по толщине исследуемого плоского тела содержит подробно изученные функции Бесселя, которые затабулированы с малым шагом в широком диапазоне изменения аргумента. В статье показано, что с помощью различных функций Бесселя могут быть аналитически решены многие задачи математической физики, имеющие важное прикладное значение.

Ключевые слова: многослойная конструкция; эквивалентное замещающее тело; температурное поле; теплофизические свойства; коэффициент теплопроводности; аналитическое решение; собственные функции; собственные числа; функции Бесселя.

To the calculation of the unsteady temperature field of a plane body at the exponential dependence of the coefficient of thermal conductivity on the coordinate

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A. A. Fedyaev[2c]

[1] Siberian Federal University; 79, Svobodny Per., Krasnoyarsk, Russia
[2] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676,
[b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Received 4.03.2019, accepted 29.04.2019

A rigorous analytical solution of the thermophysical problem associated with the determination of the unsteady temperature field in a nonuniform plane structure is obtained. In practice, such systems are most often multilayer, which significantly complicates their mathematical study. The main feature of the proposed approach to solving the problem is that instead of the actual composite product, an equivalent replacement body with a significant dependence of the thermal conductivity coefficient on the spatial coordinate is introduced. It is assumed that the most acceptable approximation function for this coefficient is natural exponential curves. With the help of these functions it is possible to describe quite accurately a wide range of boundary value problems of thermal conductivity at variable transfer coefficients. The resulting final calculation expression for finding the unsteady temperature distribution over the thickness of the plane body under study contains a detailed study of Bessel functions, which are tabulated with a small step in a wide range of argu-

ment changes. The article shows that with the help of various Bessel functions can be analytically solved many problems of mathematical physics, which have important applied value.

Keywords: multilayer structure; equivalent substituting body; temperature field; thermophysical properties; thermal conductivity coefficient; analytical solution; eigenfunctions; eigenvalues; Bessel functions.

Введение

Во многих случаях элементы конструкций, подверженные нагреву (охлаждению), являются многослойными [1–3]. При этом каждый из элементов, входящих в такую систему, обладает своими теплофизическими свойствами, которые должны наиболее полно согласовываться с назначением конкретного слоя. Применение точных способов расчета температурных полей в сопряженных системах является затруднительным [4]. Это, во-первых, связано со сложностью нахождения аналитических расчетных зависимостей, а во-вторых, полученные решения имеют, как правило, незначительную практическую ценность из-за больших трудностей нахождения собственных чисел трансцендентных характеристических уравнений [5; 6]. Таким образом, более приемлемым является подход, связанный с получением сравнительно доступных математических зависимостей.

Постановка и решение задачи. В данной работе предложен инженерный способ определения нестационарного температурного поля неоднородного плоского тела, для которого зависимость коэффициента теплопроводности может быть аппроксимирована экспоненциальной функцией. Рекомендуемый подход может быть проиллюстрирован на примере следующей теплофизической задачи, записанной в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left[\lambda(\mathrm{X})\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{X}}\right], \qquad (1)$$

$0 \le \mathrm{Fo} < \infty$; $0 \le \mathrm{X} \le 1$; $0 \le \vartheta(\mathrm{X},\mathrm{Fo}) \le 1$;

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{X}} = 0 \ \text{ при } \ \mathrm{X} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{X}} = -\mathrm{Bi}\vartheta \ \text{ при } \ \mathrm{X} = 1, \qquad (3)$$

$$\vartheta(\mathrm{X},0) = 1, \qquad (4)$$

безразмерный коэффициент теплопроводности $\lambda(\mathrm{X})$ описывается экспоненциальной зависимостью:

$$\lambda = \exp(a\mathrm{X}), \qquad (5)$$

причем параметр $a \ge 0$.

Следовательно, коэффициент теплопроводности λ материала условно замещенного тела монотонно возрастает от центра пластины к ее поверхности. При этом очевидно, что динамика изменения λ от величины пространственной координаты X согласно формуле (5) зависит от параметра a. В ранее опубликованной работе авторов [7] был подробно рассмотрен только частный случай ($a = 1$). Представленная статья существенно расширяет возможности рекомендуемого метода за счет того, что может быть задан любой коэффициент a.

Для нахождения собственных функций и собственных значений сформулированной задачи (1) – (5) необходимо провести исследование следующей задачи [8; 9]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left(\mathrm{e}^{ax}y'\right) + \mu^2 y = 0, \qquad (6)$$

$$y' = 0 \ \text{ при } \ \mathrm{X} = 0, \qquad (7)$$

$$y' = -\mathrm{Bi}\, y \ \text{ при } \ \mathrm{X} = 1. \qquad (8)$$

Вариант, когда $a = 0$, хорошо изучен в классических работах [4; 10]. Поэтому практический интерес представляют случаи, когда $a > 0$. Очевидно, что дифференциальное уравнение (6) можно представить в виде:

$$y'' - ay' + \mu^2 \mathrm{e}^{-ax} y = 0. \qquad (9)$$

Если ввести новую пространственную координату Z, используя соотношение:

$$Z = \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}, \qquad (10)$$

то зависимость (9) преобразуется к виду:

$$y'' - \frac{1}{Z}y' + \beta^2 y = 0, \qquad (11)$$

где принято обозначение:

$$\beta = \frac{2\mu}{a}. \qquad (12)$$

Затем, вводя подстановку типа:

$$y = Z \cdot U, \qquad (13)$$

удается уравнение (11) привести к виду:

$$U'' + \frac{1}{Z}U' + \left(\beta^2 - \frac{1}{Z^2}\right)U = 0. \qquad (14)$$

Это выражение относится к классу уравнений Бесселя [11–17], общее решение которого может быть записано в форме:

$$U = C\left[J_1(\beta Z) + BY_1(\beta Z)\right], \qquad (15)$$

где $J_1(\beta Z)$ и $Y_1(\beta Z)$ являются соответственно функциями Бесселя первого и второго рода первого порядка. Подробные таблицы значений этих функций приведены во многих справочных пособиях, например [11–15].

С учетом (10), (13) и (15) искомый интеграл уравнения (9) запишется в виде:

$$y = Ce^{-\frac{ax}{2}}\left[J_1\left(\beta e^{-\frac{ax}{2}}\right) + BY_1\left(\beta e^{-\frac{ax}{2}}\right)\right]. \quad (16)$$

Таким образом, общее аналитическое решение дифференциального уравнения (9) можно представить в форме произведения элементарной экспоненциальной функции и комбинации специальных функций Бесселя [16; 17].

Постоянная интегрирования B будет равна:

$$B = -\frac{J_0(\beta)}{Y_0(\beta)}, \quad (17)$$

где $J_0(\beta)$ и $Y_0(\beta)$ являются также функциями Бесселя первого и второго рода, но нулевого порядка.

Следовательно, окончательное аналитическое решение уравнения (9) с учетом (17) запишется в форме:

$$y = Ae^{-\frac{ax}{2}}\left[Y_0(\beta)J_1\left(\beta e^{-\frac{ax}{2}}\right) - J_0(\beta)Y_1\left(\beta e^{-\frac{ax}{2}}\right)\right], \quad (18)$$

где:

$$A = \frac{C}{Y_0(\beta)}. \quad (19)$$

Комплекс в квадратных скобках в правой части формулы (18) можно рассматривать как собственную функцию исследуемой задачи. Если соотношение (18) подставить в граничное условие третьего рода на поверхности плоского тела ($X = 1$) (8), то получим характеристическое уравнение для определения собственных значений μ_n данной задачи:

$$\frac{Y_0(\beta)J_1(K\beta) - J_0(\beta)Y_1(K\beta)}{Y_0(\beta)J_0(K\beta) - J_0(\beta)Y_0(K\beta)} = -\frac{aK\beta}{2\mathrm{Bi}}, \quad (20)$$

где $\beta = \frac{2\mu}{a}$; $K = e^{-\frac{a}{2}}$. Таким образом, окончательное математическое решение задачи (1) – (4) с учетом условия (5) принимает вид:

$$\vartheta(X, Fo) = e^{-\frac{ax}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(X)\exp\left(-\mu_n^2 Fo\right), \quad (21)$$

где под $K_n(X)$ понимаются собственные функции:

$$K_n(X) = Y_0(\beta_n)J_1\left(\beta_n e^{-\frac{ax}{2}}\right) - J_0(\beta_n)Y_1\left(\beta_n e^{-\frac{ax}{2}}\right). \quad (22)$$

Если число $\mathrm{Bi} \to \infty$, то формула (20) вырождается в более простое выражение:

$$\frac{J_0(\beta)}{Y_0(\beta)} = \frac{J_1(K\beta)}{Y_1(K\beta)}, \quad (23)$$

которое при наложении ограничения на комплекс $K\beta$ ($K\beta \geq 3$) может быть, согласно рекомендациям [13], заменено алгебраическим уравнением второй степени:

$$\beta^2 - \frac{(2n-1)\pi}{2(1-K)}\beta - \frac{(3+K)}{8K(1-K)} = 0, \quad (24)$$

где $n = 1, 2, 3, ...$

Отсюда следует, что корни β_n рассчитываются на основе решения:

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{4(1-K)} + \sqrt{\frac{(2n-1)^2\pi^2}{16(1-K)^2} + \frac{(3+K)}{8K(1-K)}}. \quad (25)$$

Если же $\mathrm{Bi} = 0$, т. е. граничное условие (3) преобразуется в условие второго рода, то формула (20) тоже упрощается:

$$\frac{J_0(\beta)}{Y_0(\beta)} = \frac{J_0(K\beta)}{Y_0(K\beta)}. \quad (26)$$

Применяя аналогичный вышеизложенному подход к зависимости (26), удается получить простую расчетную формулу для определения ее корней в виде:

$$\beta_n = \frac{(n-1)\pi}{2(1-K)} + \sqrt{\frac{(n-1)^2\pi^2}{4(1-K)^2} - \frac{0{,}125}{K(1-K)}}, \quad (27)$$

где $n = 2, 3, ...$, причем $\beta_1 = 0$.

Предлагаемые зависимости (25) и (27) обладают при указанном ограничении на комплекс $K\beta$ высокой степенью точности, которая вполне соответствует требованиям, предъявляемым к инженерно-техническим расчетам. Однако нужно подчеркнуть, что предельное значение для $K\beta$, рекомендуемое в [13], может быть существенно снижено без заметного уменьшения точности формул (25) и (27).

Если параметр $a \to 0$, то нетрудно показать, используя асимптотические формулы для функций $J_0(\mathrm{X})$, $J_1(\mathrm{X})$, $Y_0(\mathrm{X})$, $Y_1(\mathrm{X})$, приведенные в [11] для больших величин X, что характеристическое уравнение (20) вырождается в широко известное соотношение:

$$\mathrm{ctg}\,\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}. \quad (28)$$

Первые шесть корней μ_n этого уравнения для разных значений числа Bi (от 0 до ∞) даны в монографии [10]. Естественно, что корни μ_n, удовлетворяющие равенству (28), можно рассматривать как минимально предельные по отношению к собственным значениям выражения (20) при одинаковых величинах Bi.

В таблице 1 приведены значения первых трех корней β_n уравнения (20) для ряда чисел Bi и трех величин параметра a (0,2; 0,5 и 1,0), рассчитанных численным методом, которым соответствуют коэффициенты K (0,90484; 0,77880 и 0,60653). При этом расчеты для предельных Bi (0 и ∞) были выполнены по формулам (25) и (27).

Полезно заметить, что при известных предельных значениях собственных чисел (при $\mathrm{Bi} = 0$ и $\mathrm{Bi} \to \infty$) можно сравнительно легко установить соответствующую величину Bi по заданному β_n. Так, например, если принять для $a = 1.0$ (т. е. $K = 0,60653$) $\beta_1 = 4$, то на основе (20) получим, что $\mathrm{Bi} = 6,810$. Отсюда, в частности, следует, что при $6,819 \le \mathrm{Bi} \le \infty$ имеет место условие $4 \le \beta_1 \le 4,42$. Подобным же образом весьма просто находится величина $\mathrm{Bi} = 2,76$, соответствующая первому собственному значению $\beta_1 = 3$ при условии $a = 1.0$ и $K = 0,60653$. Такой прием позволяет быстро выявить ориентировочную величину β_n при известном Bi.

Таблица 1

Значения первых трех корней характеристического уравнения $\dfrac{Y_0(\beta)J_1(K\beta) - Y_0(\beta)J_1(K\beta)}{Y_0(\beta)J_0(K\beta) - J_0(\beta)Y_0(K\beta)} = -\dfrac{aK\beta}{2\mathrm{Bi}}$

Bi	$a = 0,2$ $K = 0,90784$			$a = 0,5$ $K = 0,77880$			$a = 1,0$ $K = 0,60653$		
	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
0	0	32,9698	66,0056	0	14,1525	28,3794	0	7,9182	15,9358
0,5	7,1908	36,1417	67,7258	3,3195	14,9664	28,8025	2,1032	8,4613	16,2153
1,0	9,4382	34,6740	66,8905	4,3329	15,1457	29,1902	2,7157	8,8966	16,4642
5,0	14,2345	42,6901	72,8710	6,4066	18,5703	31,5277	3,8734	10,6465	17,9048
10,0	15,4129	45,5204	76,2368	6,8911	19,7649	32,9839	4,1207	11,2906	18,7244
25,0	16,2378	47,8332	79,6487	7,2238	20,7105	34,3977	4,2853	11,7442	19,4642
50,0	16,5345	48,7110	81,0700	7,3422	21,0634	34,9716	4,3430	11,9499	19,7525
100,0	16,6870	49,1673	81,8246	7,4028	21,2458	35,2738	4,3723	12,0399	19,9023
500,0	16,8111	49,5396	82,4442	7,4520	21,3942	35,5210	4,3960	12,1128	20,0241
1 000,0	16,8267	49,5865	82,5224	7,4582	21,4129	35,5522	4,3990	12,1220	20,0395
∞	16,8435	49,6349	82,6031	7,4684	21,4317	35,5833	4,4196	12,1322	20,0550

Естественно также, что при $a = 0$ собственные функции:

$$K_n(X) = \cos(\mu_n X), \qquad (29)$$

т. е. вырождаются в тригонометрические. Коэффициенты A_n, входящие в бесконечную сумму решения (21), определяются из начального условия (4). Подставляя (21) в (4), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(X) = \mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}. \qquad (30)$$

Отсюда, принимая во внимание ортогональность функций $K_n(X)$, вытекает соотношение:

$$A_n = \frac{\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{ax}{2}} K_n(X)\mathrm{d}x}{\int_0^1 K_n^2(X)\mathrm{d}x}, \qquad (31)$$

которое, в частности, при $a = 0$ имеет следующий вид [10]:

$$A_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n}. \qquad (32)$$

В монографии [10] приведены численные значения первых шести амплитуд A_n.

Заключение

Необходимо отметить, что рекомендуемый аналитический метод позволяет с помощью разных типов известных функций Бесселя эффективно исследовать весьма многочисленные теплофизические задачи, которые часто встречаются в инженерной практике. При этом могут быть охвачены разнообразные типы граничных условий, в том числе и нелинейные.

Литература

1. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: Изд-во Крас. политехн. ин-та, 1974. 144 с.

2. Видин Ю.В. О нестационарной теплопроводности в слоистой среде // Инж. физ. Журнал. 1968. Вып.14, № 6. С. 1048-1055.

3. Иванов В.В., Видин Ю.В., Колесник В.А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным теплом. Ростов/н. Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1990. 159 с.

4. Карслоу Г.С., Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.

5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.

6. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.

7. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности // Системы Методы Технологии. 2019. № 1 (41). С. 57–60.

8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

11. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. В 2 т. М.: ИЛ, 1949. Т. 2. 219 с

12. Чистова Э.А. Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 524 с.

13. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 890 с.

14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

15. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1962. 450 с.

16. Корнеев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1960. 458 с.

17. Корнеев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. М.: Гл. ред. физ-мат. лит. изд.: Наука, 1971. 283 с.

References

1. Vidin Yu.V. Engineering methods of calculation of heat transfer processes. Krasnoyarsk. Krasnoyarsk Polytechnic Institute publ., 1974. 144 p.

2. Vidin Yu.V. On unsteady thermal conductivity in a layered medium. Ing. journal of physics, 1968, vol. 14, № 6. P. 1048–1055.

3. Ivanov V.V., Vidin Yu.V., Kolesnik V.A. Processes of heating multilayer bodies by radiant-convective heat. Rostov-on-Don, Rostov University publ., 1990. 159 p.

4. Carslaw H.S., Jaeger D.K. the thermal Conductivity of solids., Moscow: Nauka, 1964. 487 p.

5. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of unsteady thermal conductivity. M.: Higher school, 1978. 328 p.

6. Zarubin V.S. Engineering methods for solving problems of thermal conductivity. M.: Energoatomizdat, 1983. 328 p.

7. Vidin Yu.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method for calculation of non-stationary temperature field with variable thermal conductivity. Systems Methods Technologies, 2019, BrSU, № 1 (41). P. 57–60.

8. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Partial differential Equations of mathematical physics. M.: Higher school, 1970. 712 p.

9. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. equations of mathematical physics. M.: Nauka, 1969. 735 p.

10. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Higher school, 1967. 600 p.

11. Watson G.N. Theory of Bessel functions, vol. 1 and 2. M.: IL, 1949. 219 p.

12. Chistova E.A. Tables of Bessel functions from the real argument and integrals from them. Moscow: Publishing house of the USSR, 1958. 524 p.

13. Abramowitz M. and Stigan I. Guide to special functions. M.: Nauka, 1979. 890 p.

14. Janke E., Emde F., Lesh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.

15. Segal B.I., Semendyaev K.A. Five-digit mathematical tables. Moscow: State. Izd-vo Fiz-Mat. lit., 1962. 450 p.

16. Korneev B.G. Some problems of the theory of elasticity and thermal conductivity solved in Bessel functions. Moscow: State. Izd-vo Fiz-Mat. lit., 1960. 458 p.

17. Korneev B. G. introduction to the theory of Bessel functions. M: the Main edition of physical and mathematical. lit. ed. " Nauka", 1971. 283 p.