УДК 531.31; 531.36; 531.44 DOI: 10.18324/2077-5415-2019-2-44-48

Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Статья поступила 16.03.2019, принята 22.04.2019

Парадокс Пенлеве для классической модели тормозной колодки выражает возможность отрицательных значений у силы реакции, действующей со стороны цилиндра (диска, колеса) на колодку. Такое несоответствие с действительностью получается вследствие неправильного применения закона Кулона. Силу трения скольжения со стороны вращающегося цилиндра следует искать не в виде постоянной силы, как это принято делать, а обратно пропорционально частоте его вращения. Это следует из качественно новой теории качения, созданной на основе метода кинематических зон, и соответствует частному случаю, когда вращающееся тело буксует на месте. Переход к нелинейной модели позволяет дать объяснения следующим экспериментальным фактам: нелинейной зависимости изменения частоты вращения цилиндра от времени при торможении, возможности отскоков и заклинивания колодки. Перечисленное было невозможно объяснить в рамках прежней линейной модели тормозной колодки. Подтверждается и гипотеза В.А. Самсонова о возможности удара трением. Аналогичное объяснение причин возникновения парадокса Пенлеве приведено и для другой классической системы — диска, вращающегося под действием момента и вжимаемого в угол постоянной силой. Вопрос о парадоксе Пенлеве для двух рассмотренных классических систем можно считать закрытым — противоречий, связанных с применением закона Кулона, здесь нет.

Ключевые слова: сухое трение; закон Кулона; сила трения скольжения; тормозная колодка; парадокс Пенлеве; удар трением.

The finale of Painleve's paradox in case of the brake shoe

V.A. Koronatov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Received 16.03.2019, accepted 22.04.2019

Painleve's paradox for the classical brake pad model expresses the possibility of negative values of the reaction force acting from the cylinder (disc, wheel) on the pad. Such a discrepancy with reality is due to the incorrect application of Coulomb's law. The force of sliding friction on the side of a rotating cylinder should not be sought as a constant force, as is customary, but inversely proportional to the frequency of its rotation. This follows from the qualitatively new theory of rolling, created on the basis of the kinematic zones method, and corresponds to the special case when the rotating body slips in place. The transition to a nonlinear model allows explaining the following experimental facts: the nonlinear dependence of the change in the cylinder speed on time during braking, the possibility of rebounds and block wedging. The above was impossible to explain in the framework of the previous linear model of the brake pad. The hypothesis of V.A. Samsonov about the possibility of impact friction is also confirmed. A similar explanation of the causes of the Painleve's paradox is given for another classical system - a disk rotating under the action of a moment and pressed into a corner by a constant force. The question of Painlevé paradox for the two considered classical systems can be considered closed - there are no contradictions connected with the application of Coulomb's law.

Keywords: dry friction; Coulomb's law; sliding friction force; brake shoe; Painleve's paradox; frictionblow.

Введение

В конце XIX в. П. Пенлеве в своей книге о трении [1] привел ряд относительно простых примеров, где при описании движения механических систем с сухим трением проявлялись некорректности: решение либо отсутствовало (не соответствовало действительности), либо предполагалось их существование в не единственном числе. Это дало французскому ученому основание для утверждения о несовершенстве закона Кулона. У Пенлеве в последующем появились как последователи в данном вопросе, так и противники. Помимо задач, предложенных Пенлеве, стали появляться новые, которые всегда берутся на заметку, вызывают большой интерес и стремление к их решению [2–4]. Указанные выше некорректности стало принято называть парадоксами Пенлеве, и нахождение причин их возникновения имеет принципиальное значение для развития вопросов теории сухого трения. Такие причины могут означать либо несовершенство принятой модели, либо неправильное применение закона Кулона или его несовершенство. Обычно молчаливо предполагается несовершенство самого закона Кулона, так как для некоторых задач, таких, например, как тормозная колодка [4–12], принимаемая модель весьма проста и очевидна, и с ее выбором, казалось бы, трудно ошибиться. Попытки усовершенствовать или обобщить закон Кулона пока не дали результатов, по крайней мере, в рамках обычной классической механики. Парадоксу Пенлеве посвящено много исследований, например, помимо названных выше, работы [13–21].

Мнение автора по данному вопросу следующее. Как представляется, сомневаться в справедливости закона Кулона нет оснований — экспериментальные данные, указывающие на это, отсутствуют, а те результаты теоретических расчетов, которые не всегда корректны, — это, скорее всего, изъяны принятой модели или неправильного применения законов Кулона. О том, что законы Кулона не всегда правильно применяются, говорят, например, недавние работы автора [22–25], где это доказано для тел с комбинированной кинематикой движения. Существенно также, что применение результатов, полученных в этих работах, позволяет, по сути, переходить от линейных к нелинейным динамическим моделям. Переход к новым нелинейным моделям позволяет получать качественно новые результаты подобно тому, как это наблюдалось, например, ранее при развитии теории колебаний. Как следствие, следует ожидать, что при переходе к нелинейной системе будут исчезать и парадоксы Пенлеве. Последнее наглядно продемонстрировано в данной статье на примере двух классических систем — тормозной колодки и диска, вращающегося под действием момента и вжимаемого в угол постоянной силой.

Модель тормозной колодки. Классическая модель тормозной колодки показана на рис. 1.

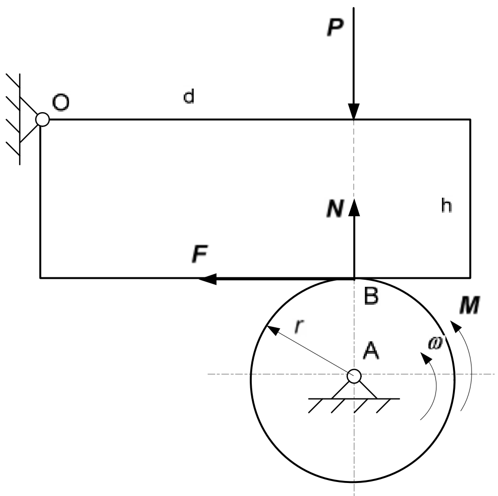

Рис. 1. Классическая модель тормозной колодки

Здесь вращение цилиндра вокруг неподвижной оси создается моментом M двигателя и тормозится колодкой посредством прижимной силы P. Предполагается, что момент M, а значит, и вращение цилиндра, направлены против часовой стрелки. Шарнирно закрепленная в точке O колодка, имеющая возможность совершать только вращательное движение, испытывает противодействие со стороны цилиндра в виде нормальной реакции N и силы трения скольжения F. Сила трения определяется согласно закону Кулона:

$$F = fN , \tag{1}$$

где f — коэффициент трения. Размеры d, h определяют соответственно место приложения силы P и ширину колодки; r, ω — радиус и частота вращения цилиндра.

Предполагая, что колодка находится в безотрывном положении по отношению к цилиндру, уравнение ее равновесия для моментов относительно шарнира O запишется в виде:

$$(N - P)d - Fh = 0 ,$$

откуда следует, что:

$$N = \frac{Pd}{d - fh}. \tag{2}$$

Парадокс Пенлеве. Именно последнее равенство (2) и дало повод говорить о парадоксе Пенлеве. Здесь при $d - fh > 0$ полученный результат означает, что реакция N положительна — что ожидаемо — и вопросов не вызывает, однако случай, когда $d - fh < 0$, приводит к отрицательной реакции — это не может соответствовать действительности. В работах В.Ф. Журавлева [4–8] этот случай объясняется тем, что тормозная колодка как бы превращается в клиновой стопор, и вращение цилиндра становится невозможным, а чрезмерные попытки осуществить вращение в этом случае приводят к поломке механизма. С этим можно согласиться только перед началом вращения цилиндра, но как быть, если вращение уже шло, а колодку с такими параметрами стали прижимать? Заклинивание или поломку здесь трудно ожидать, тем более, если при этом прижимная сила P незначительна по величине.

В работе В.А. Самсонова [11] одна из возможных причин возникновения парадокса Пенлеве объяснялась возможностью возникновения «удара трением», что приводит к кратковременному бесконечно большому значению силы трения. Правда, предположение об «ударе трением» на рассматриваемой модели тормозной колодки выглядит не столь убедительно.

Заметим, что в случае, когда $d - fh = 0$, будет либо $P = 0$, либо $d = 0$, что соответствует тому, что $N = 0$.

Решение парадокса Пенлеве. По мнению автора, отмеченные выше некорректности для тормозной колодки, согласно формуле (1), были получены из-за неправильного применения закона Кулона при нахождении силы трения скольжения, возникающей между колодкой и вращающимся цилиндром. Согласно качественно новой теории качения [23–25], использующей метод кинематических зон, при нахождении силы трения скольжения вместо применяемой формулы (1) следует использовать следующую зависимость:

$$F = F_0 \frac{|\upsilon| + \Delta}{|\upsilon| + br|\omega| + \Delta}, \; F_0 = F\,|_{\omega\equiv 0} = fP. \qquad (3)$$

Здесь υ, ω — соответственно скорости скольжения и качения; Δ, b – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально; знак модуля учитывает возможность изменения направления вращения в общем случае. Заметим, что когда $\omega \equiv 0$ реакция со стороны цилиндра определяется как $N = P$, что соответствует коэффициенту трения покоя $f = 0$. Предполагается, что направление вращения цилиндра неизменно, и для случая «буксование цилиндра на месте», когда скорость проскальзывания в точке B равна $\upsilon = \omega r$, вместо зависимости (3) следует использовать формулу:

$$F = fP \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}. \qquad (4)$$

Введенная зависимость (4) означает переход от линейной модели тормозной колодки к нелинейной. В пользу такого перехода говорят и экспериментальные данные, приведенные в работе Т.Б. Ивановой с соавторами [9], опубликованной на страницах журнала «Доклады Академии наук». В этой работе были замечены варианты отрыва (отскоки) колодки от цилиндра при работе вблизи критических значений параметров. Экспериментальные данные говорили также о нелинейной зависимости угловой скорости цилиндра от времени. Перечисленное было невозможно объяснить в рамках прежней, линейной, модели тормозной колодки. Отрыв колодки, если допустить значительное увеличение силы трения, например, вследствие зазубренности поверхностей цилиндра и колодки, становится весьма очевидным и без эксперимента. Именно такие «мысленные эксперименты» и позволили автору по-новому взглянуть на обсуждаемую проблему.

Из уравнения равновесия колодки, с учетом соотношения (4), следует, что:

$$N = P\left[1 + \frac{h}{d} f \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}\right]. \qquad (5)$$

Полученные результаты в виде зависимостей (4) и (5) закрывают вопрос о возможности парадокса Пенлеве. Дифференциальное уравнение вращательного движения цилиндра запишется в виде:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M - rfP \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta},$$

что говорит о нелинейном законе изменения частоты вращения ω, а не о равнопеременном, как это считалось ранее (I — момент инерции цилиндра). Это находит подтверждение в работе Т.Б. Ивановой с соавторами. В этой работе экспериментальные данные указывают именно на нелинейную зависимость для частоты вращения, а не на линейную, к которой авторы статьи пытались «подогнать», используя метод наименьших квадратов. К этому их подталкивало привычное применение формул (1) и (2), используемых для нахождения сил трения скольжения и реакции и приводящих к равнопеременному вращательному движению цилиндра. Возможный удар и подпрыгивание колодки при этом становятся весьма очевидными при большом значении коэффициента трения f и (или) прижимной силы P. В прежнем варианте отмеченное было не столь очевидно.

Вращающийся диск, вжимаемый в угол. На рис. 2 представлена следующая классическая система, приводящая к парадоксу Пенлеве [13–15]: диск, вращающийся под действием момента M и вжимаемый в угол постоянной силой P. Здесь предполагается, что направляющая L гладкая, а направляющая K — шероховатая, с коэффициентом трения f (α — угол между направляющими; R, N — реакции, действующие на диск со стороны направляющих; ω — угловая скорость вращения диска).

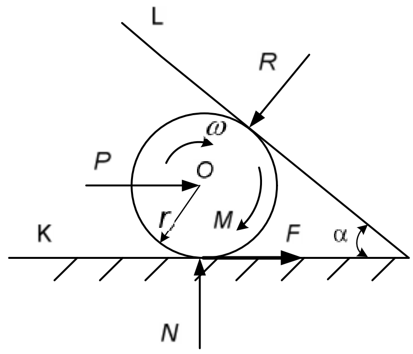

Рис. 2. Вращающийся диск, вжимаемый в угол

Тогда, полагая, что диск буксует на месте, сила реакции N определяется так:

$$N = \frac{P}{tg\alpha - f}. \qquad (6)$$

Выражение (6) говорит о том, что при $tg\alpha - f < 0$ сила реакции N может быть тоже отрицательной — это будет выражать парадокс Пенлеве для данного случая. Здесь, по мнению автора, причина парадокса та же — неправильное применение закона Кулона при нахождении силы трения скольжения, возникающей между буксующим диском и шероховатой поверхностью. Если, как и для тормозной колодки, применить качественно новую теорию качения и формулу (3), то все нормализуется. Для данного случая в формуле (3) следует принять, что $F_0 = F\,|_{\omega\equiv 0} = fPctg\alpha$. Тогда получается:

$$N = \frac{P}{tg^2\alpha}\left[tg\alpha + f \frac{r\omega + \Delta}{r(b+1)\omega + \Delta}\right]. \qquad (7)$$

Формула (7) говорит о том, что и здесь парадокса Пенлеве не будет.

Заключение

Полученные результаты опровергают сомнения о справедливости закона Кулона для рассмотренных классических систем — тормозной колодки и диска, вращающегося под действием момента и вжимаемого в угол постоянной силой. Более того, как оказалось, результаты, которые ранее воспринимались как «некорректные», фактически указывают на неточное описание этих моделей. Приведенные уточнения позволяют правильно понять ранее обсуждаемые «некорректности» и увидеть, что претензий к закону Кулону не должно быть. Вопрос о парадоксе Пенлеве для тормозной колодки и другой рассмотренной системы можно считать закрытым.

PS. В моей недавней работе [25] авторство в вопросе установления факта уменьшения коэффициента сухого трения с ростом скорости для колес железнодорожного транспорта несправедливо приписывалось А. Зоммерфельду. Автор выражает благодарность В.В. Козлову, который указал на данную неточность. Вместе с тем хотелось бы еще раз подчеркнуть, что, по мнению автора, если уменьшение коэффициента сухого трения с ростом скорости и наблюдается, то этот факт нуждается в обосновании — ранее существующие доказательства с позиций качественно новой теории качения будут некорректны. Сила трения скольжения может убывать и при постоянном коэффициенте трения, например, в результате роста скорости скольжения (см. формулу (4)).

Литература

1. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. Самсонов В.А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика»: Ин-т компьютерных исслед., 2001. 80 с.
3. Сумбатов А.С., Юнин Е.К. Избранные задачи механики с сухим трением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 200 с.
4. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика»: Ин-т компьютерных исслед., 2010. 164 с.
5. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Докл. Акад. наук. 2017. Т. 474, № 3. С. 301–302.
6. Журавлев В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2 (113) С. 77-85.
7. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 2 (53) С. 21-31.
8. Журавлев В.Ф. К истории закона сухого трения // Изв. Рос. Акад. наук. Механика твердого тела. 2013. № 4. С.13-19.
9. Иванова Т.Б., Ердакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Докл. Акад. наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 421–424.
10. Козлов В.В. Трение по Пенлеве и лагранжева механика // Докл. Акад. наук. 2011. Т. 438, № 6. С. 758–761.
11. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и “удар трением” // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 912–921.
12. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 366–375.
13. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7-33.
14. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пенлеве // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2. С. 53-66.
15. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство: 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2010. 420 с.
16. Неймарк Ю.И. Еще раз о парадоксе Пэнлеве // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 1995. № 1. С.17-21.
17. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве-Клейна: о парадоксе Пэнлеве // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 1991. № 4. С.48-53.
18. Бутенин Н.В. Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, № 1. С. 3–32.
19. Матросов В.М., Финогенко И.А. О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3-13.
20. Матросов В.М., Финогенко И.А. О правосторонних решениях дифференциальных уравнений динамики механических систем с трением // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 6. С. 877–886.
21. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и законы движения механических систем с кулоновским трением // Прикладная математика и механика. 1990. Т. 54, № 4. С. 520–529.
22. Коронатов В.А. О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу – Журавлева // Системы Методы Технологии. 2019. № 1 (41). С. 21-28.
23. Коронатов В.А. Обобщение качественно новой теории качения колеса при описании явления шимми // Системы Методы Технологии. 2018, № 1 (37). С. 45-55.
24. Коронатов В.А. Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании // Системы Методы Технологии. 2018. № 3 (39). С. 24-32.
25. Коронатов В.А. Ошибка А. Зоммерфельда и о дискуссии применимости голономной механики для задач качения // Системы Методы Технологии. 2018. № 4 (40). С. 20-26.

References

1. Painleve P. Lectures about friction. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.
2. Samsonov V.A. Sketches about mechanics: Some tasks, phenomena and paradoxes. M.; Izhevsk, Research Center Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika. Ying t computer исслед., 2001. 80 p.
3. Sumbatov A.S., Yunin E.K. The chosen problems of mechanics with dry friction. M.: FIZMATLIT, 2013. 200 p.
4. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk, Research Center Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika. Ying t computer исслед., 2010. 164 p.

5. Zhuravlev V.F. About "paradox" of a brake shoe//Reports of Academy of Sciences. 2017. T. 474. No. 3. P. 301-302.

6. Zhuravlev V.F. Incorrect tasks mechanics // Messenger of Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument making. 2017. No. 2 (113). P. 77-85.

7. Zhuravlev V.F. 500 years of history of the law of dry friction // Messenger of Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences. 2014. No. 2 (53). P. 21-31.

8. Zhuravlyov V.F. To history of the law of dry friction // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 2013. No. 4. P. 13-19.

9. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Yu.L. Loaves. Pilot study of a brake shoe // Reports of Academy of Sciences. 2016. T. 471. No. 4. P. 421-424.

10. Kozlov V.V. Friction according to Painleve and Lagrangian mechanics//Reports of Academy of Sciences. 2011. T. 438. No. 6. P. 758-761.

11. Samsonov V. A. Dynamics of a brake shoe and "blow by friction" // Applied mathematics and mechanics. 2005. T. 69. No. 6. P. 912-921.

12. Neymark Yu.I., Fufayev N.A. Painleve's paradoxes and dynamics of a brake shoe // Applied mathematics and mechanics. 1995. T. 59. No. 3. P. 366-375.

13. Neymark Yu.I., Smirnov V.N.K to century of a problem of a paradox of Painleve // Messenger of the Nizhny Novgorod university of N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimum control. 2001. No. 2. P. 7-33.

14. Neymark Yu.I., Smirnov V.N. Idealization, mathematical modeling and Painleve's paradox // Messenger of the Nizhny Novgorod university of N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimum control. 1999. No. 2. P. 53-66.

15. Neymark Yu.I. Mathematical modeling as science and art: the 2nd prod., испр. and additional. N. Novgorod: Publishing house of the Nizhny Novgorod State University, 2010. 420 p.

16. Neymark Yu.I. Once again about Painleve's paradox//News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 1995. No. 1. P. 17-21.

17. Fufayev N.A. Dynamics of a system in an example Penlev-Klein: about Painleve's paradox // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body. 1991. No. 4. P. 48-53.

18. Butenin N.V. Consideration of "degenerate" dynamic systems by means of a hypothesis of "jump" // Applied mathematics and mechanics. 1948. T. 12. No. 1. P. 3-32.

19. Matrosov V.M., Finogenko I.A. About resolvability of the equations of the movement of mechanical systems with a sliding friction//Applied mathematics and mechanics. 1994. T. 58. Issue 6. P. 3-13.

20. Matrosov V.M., Finogenko I.A. About right-hand solutions of the differential equations of dynamics of mechanical systems with friction // Applied mathematics and mechanics. 1995. T. 59. No. 6. P. 877-886.

21. Le Soin An. Painleve's paradoxes and laws of the movement of mechanical systems with Coulomb friction // Applied mathematics and mechanics. 1990. T. 54. No. 4. P. 520-529.

22. Koronatov V. A. About dry friction at not forward sliding of a body and the critic of the theory of Kontensu – Zhuravleva // Systems Methods Technologies. 2019, No. 1 (41). P. 21-28.

23. Koronatov V. A. Synthesis of qualitatively new theory of swing of a wheel at the description of the phenomenon of a shimma // Systems Methods Technologies. 2018, No. 1 (37). P. 45-55.

24. Koronatov V. A. The general approach to determination of forces of resistance when swing, sliding bodies with spinning, drilling, penetration, drilling and smoothing down // Systems Methods Technologies. 2018. No. 3 (39). P. 24-32.

25. Koronatov V. A. A mistake of A. Sommerfeld and about a discussion of applicability of holonomic mechanics for problems of swing // Systems Methods Technologies. 2018. No. 4 (40). P. 20-26.