

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621.534, 629.4.015

DOI: 10.18324/2077-5415-2019-1-7-15

Возможности структурного математического моделирования в оценке динамических свойств технологических вибрационных машин

С.В.Елисеев^{1а}, Р.С.Большаков^{1б}, И.С.Ситов^{2с}

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

²Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

eliseev_s@inbox.ru, ^bbolshakov_rs@mail.ru, ^csitov@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>, ^b<https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>,

^c<https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>

Статья поступила 25.11.2018, принята 28.12.2018

Ключевые слова: вибрационная технологическая машина; структурная схема; передаточная функция; дополнительная связь; динамическая реакция связей; связность внешних сил.

The possibilities of structural mathematical modeling in the evaluation of the dynamic properties of technological vibration machines

S.V. Eliseev^{1,a}, R.S. Bolshakov^{1,b}, I.S. Sitov^{2,c}

¹Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

²Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

eliseev_s@inbox.ru, ^bbolshakov_rs@mail.ru, ^csitov@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6876-8786>, ^b<https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>,

^c<https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>

Received 25.11.2018, accepted 28.12.2018

The article considers the development of the methodological basis in solving the problems of the dynamics of vibration machines with introduced additional constraints. The purpose of the study is to develop a method for constructing mathematical models that provide an assessment of the dynamic properties of technical objects with the introduction of additional relationships, whose dynamic state is evaluated and controlled according to certain parameters. The authors use methods of structural mathematical modeling, with structural mathematical models being built on their basis. To determine the dynamic properties of the system, the methods and analytical tools of the theory of automatic control are used. It is shown that the introduction of additional constraints in an asymmetrical arrangement necessitates the development of special methods of estimating dynamic stiffness. A method of constructing structural models of objects has been proposed, and a technology of determining the dynamic reactions of constraints has been developed. In addition, a technology of evaluating the peculiarities of accounting for the connected action of external forces has been offered. It is shown that the joint action of external factors forms the influence of interpartial constraints and the manifestations of new dynamic effects in the modes of dynamic oscillation damping. Analytical relationships have been obtained, a methodological basis for the dynamic synthesis of the

parameters of mechanical oscillatory systems with the ability to tune and control the vibration fields of the working bodies has been developed.

Keywords: technological vibration machine; structural diagram; transfer function; additional constraint; dynamic reaction of constraints; connectivity of external forces.

Введение

Вибрационные технологические машины (вибростенды) в задачах динамики, связанных с оценкой возможностей построения необходимых распределений амплитуд колебаний точек рабочих органов, рассматриваются чаще всего в виде механических колебательных систем, совершающих плоские движения [1–3]. Большое распространение получили расчетные схемы технологических машин, представляющие собой механические колебательные системы с двумя степенями свободы, что можно объяснить стремлением к получению аналитических соотношений, определяющих основные свойства [4; 5]. В формировании распределения амплитуд колебаний точек рабочих органов, которые существенным образом зависят от динамических связей элементов, входящих в систему, определенными преимуществами обладают методы структурного математического моделирования, в рамках которых исходная механическая система отображается структурной схемой (структурной математической моделью) эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления [6;7].

При всей изученности вопросов динамических взаимодействий элементов вибрационных технологических машин, что нашло отражение в работах [8–10], ряд вопросов, связанных с введением дополнительных элементов и устройств, что реализуется во многих конструктивных решениях, не получил еще достаточно детализированного представления. В частности, это относится к оценкам несимметричного расположения элементов, эффектам совместного действия нескольких силовых факторов, особенностям распределения амплитуд колебаний точек рабочих органов и определения динамических реакций в узлах крепления дополнительных элементов.

В предлагаемой статье рассматриваются вопросы учета особенностей расположения точек крепления типовых элементов с рабочим органом вибрационной технологической машины, что имеет значение для построения приведенных схем упрощенного вида для рассматриваемых технических объектов.

Некоторые общие положения. В работах [11; 12] рассмотрены различные конструктивно-технические варианты реализации вибрационных технологических машин, которые отображаются расчетными схемами в виде механических колебательных систем с двумя степенями свободы (рис. 1,). Так, например, рабочий орган технологической машины цепного типа может обладать массой m_2 и иметь три упругих элемента k_1, k_2, k_3 (рис. 1), а также промежуточный элемент массой m_1 . Движение системы рассматривается в координатах y_1, y_2 , связанных с неподвижным базисом.

Технологическая вибрационная машина с рабочим органом в виде твердого тела массой M и моментом инерции J приведена на рис. 1 . Рабочий орган в виде

твердого тела опирается на упругие элементы с жесткостями k_1, k_2 и k_3 .

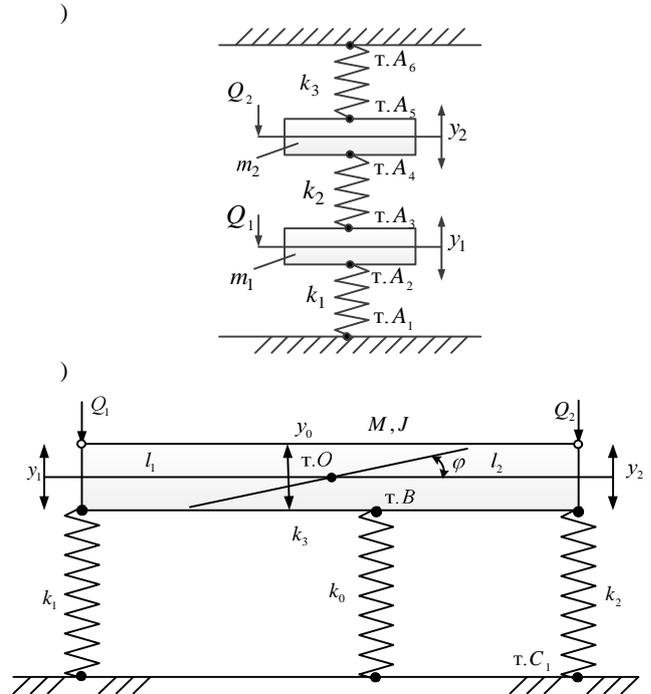


Рис. 1. Расчетные (или принципиальные) схемы технических объектов: — в виде цепной системы; — в виде системы с рабочим органом (M, J), совершающим плоское движение как твердое тело

Структурная математическая модель по отношению к расчетной схеме на рис. 1 может быть получена на основе подходов, изложенных в работах [5; 6], и имеет вид, как показано на рис. 2.

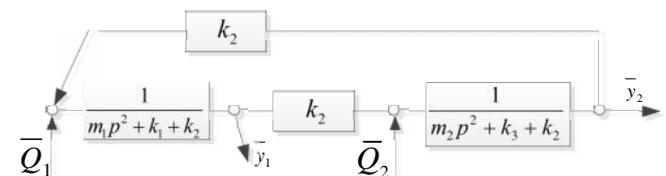


Рис. 2. Структурная схема (структурная математическая модель) технического объекта на рис. 1

На рис. 2 приняты следующие обозначения: $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$); значок \leftrightarrow над переменной означает ее изображение по Лапласу [5; 6].

1. Структурная математическая модель для расчетной схемы по рис. 1 может быть построена на основе такого же формализма, как и для расчетной схемы на рис. 1 . Особенностью расчетной схемы является то, что, кроме обычных упругих элементов с жесткостями k_1 и k_2 , в системе имеется дополнительный упругий элемент жесткостью k_0 , закрепленный в т. на расстоянии l_0 от центра масс т. (рис. 1). Структурная схема системы на рис. 1 (структурная математическая модель) приводится на рис. 3.

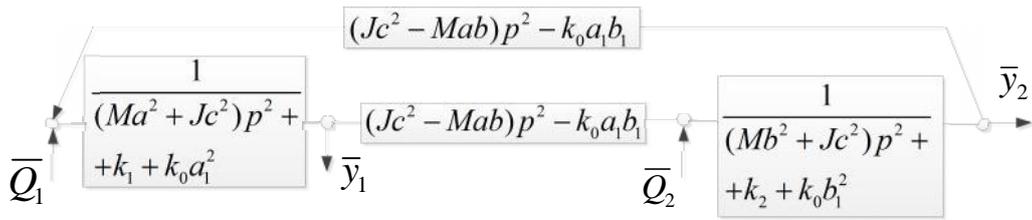


Рис. 3. Структурная математическая модель механической системы на рис. 1

Система, представленная структурной схемой на рис. 2, может быть при объекте m_2 , динамическое состояние которого оценивается, интерпретирована в виде, как показано на рис. 4 , .

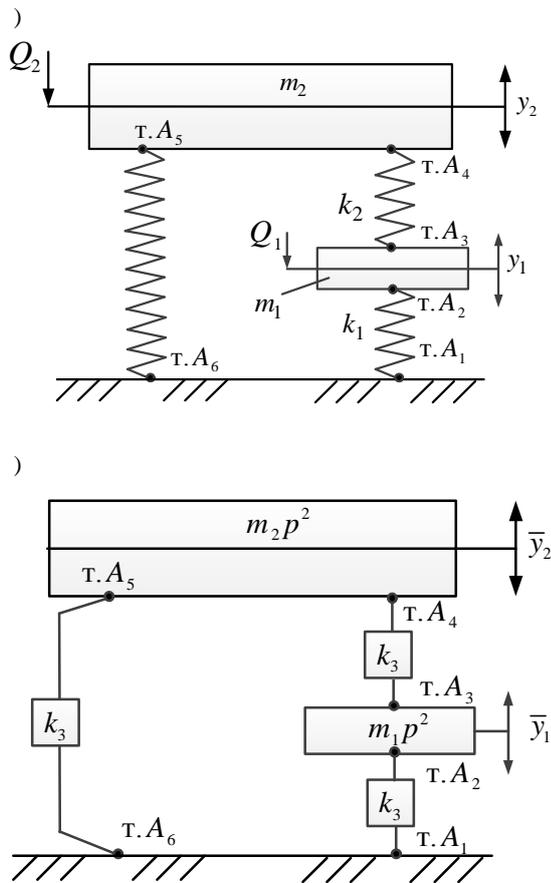


Рис. 4. Расчетные схемы системы по рис. 1 : — преобразованная схема; — схема в операторной форме

2. Если массоинерционный элемент m_2 рассматривается как объект, динамическое состояние которого оценивается, то его структурная схема (или структурная математическая модель) может быть получена путем преобразования структурной схемы на рис. 2. Результаты таких трансформаций представлены на рис. 5.

Цепь обратной отрицательной связи по отношению к объекту m_2 , может быть представлена передаточной функцией:

$$k(p) = \frac{m_1 p^2 (k_2 + k_3) + k_1 (k_2 + k_3) + k_2 k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)} \quad (1)$$

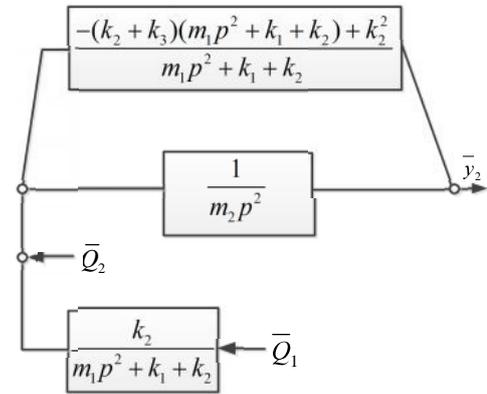


Рис. 5. Структурная схема исходной системы (рис. 1) с объектом защиты m_2

По своей физической сути выражение (1) определяет приведенную динамическую жесткость для объекта m_2 в преобразованной модели, имеющей вид базовой структуры с одной степенью свободы. Зная приведенную жесткость и динамическое смещение \bar{y}_2 , можно найти динамические реакции в тг. 4, 5 (рис. 4), т. е. динамические реакции, действующие на элементе m_2 . Принципиальная схема на рис. 1 в этом случае может быть трансформирована к виду, как показано на рис. 4 , в операторной форме.

3. Если по отношению к принципиальной схеме на рис. 4 после преобразований ее математической модели по Лапласу при нулевых начальных условиях применить правила структурных преобразований, то приведенная обобщенная жесткость определится выражением (11):

$$\begin{aligned} k(p) &= k_3 + \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)} = \\ &= \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + m_1 p^2 k_2 + k_1 k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)} = \\ &= \frac{(k_2 + k_3) m_1 p^2 + k_1 (k_2 + k_3) + k_2 k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

что совпадает с оценкой приведенной динамической жесткости на основе выражения (1). Динамическое смещение по координате \bar{y}_2 при одновременном действии двух внешних возмущений \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 можно представить в виде:

$$\bar{y}_2(p) = \frac{\bar{Q}_2 (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + \bar{Q}_1 k_2}{A(p)}, \quad (3)$$

где $A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2$ является частотным характеристическим уравнением системы.

Используя полученные выше выражения, определим динамическую реакцию связей на элементе m_2 :

$$\bar{R}_{m_2} = k(p) \cdot \bar{y}_2(p) = \frac{\left[(k_2 + k_3)m_1 p^2 + \dots \right]}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \times \dots} \times \frac{\left[\bar{Q}_2(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + \bar{Q}_1 k_2 \right]}{\times A(p)} \quad (4)$$

4. Если ввести в рассмотрение условие связности между внешними возмущениями \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 в виде соотношения:

$$\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}_1, \quad (5)$$

где α — коэффициент связности, который может принимать нулевые, положительные и отрицательные значения, то выражение (4) можно привести к виду амплитудно-частотной характеристики реакций связи по приведенному внешнему воздействию:

$$W(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_2} = \frac{\left[(k_2 + k_3)m_1 p^2 + k_1(k_2 + k_3) + k_2 k_3 \right] \times \dots}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \times \dots} \times \frac{\left[(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + \alpha k_2 \right]}{\times A(p)} \quad (6)$$

Что касается динамических реакций в т. 6, то она может быть определена выражением:

$$\bar{R}_{A_6} = k_3 \cdot \bar{y}_2(p). \quad (7)$$

Таким образом, процедура оценки динамических реакций в точках крепления типовых элементов (в данном случае пружин) предполагает предварительное определение приведенных, а также динамических жесткостей в выделенных точках, и динамических смещений, формируемых внешними возмущениями с учетом особенностей взаимодействия между собой. Что касается определения реакций в тт. 1, 2, 3 и др., то для их определения можно воспользоваться технологиями, изложенными в работе [11].

Определение приведенной динамической жесткости методом прямых структурных преобразований. Расчетная схема исходной системы на рис. 1 в операторной форме (рис. 4) может быть приведена к системе с одной степенью свободы (координата \bar{y}_1) с обобщенным квазиупругим элементом с жесткостью:

$$k(p) = k_1 + \frac{(m_1 p^2 + k_3) \cdot k_2}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3)}. \quad (8)$$

Выражение (8), в свою очередь, может быть преобразовано к виду:

$$k'(p) = \frac{(k_1 + k_2)m_2 p^2 + k_1(k_2 + k_3) + k_2 k_3}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3)}. \quad (9)$$

Из (8) следует, что обобщенная жесткость $k'(p)$ на частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} \quad (10)$$

имеет большие значения (знаменатель (9) обнуляется), и на частоте, определяемой выражением:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{m_2(k_1 + k_2)}, \quad (11)$$

обобщенная жесткость становится равной нулю, что существенно изменяет свойства системы.

Приведенная жесткость $k''(p)$ называется динамической, поскольку зависит от частоты. Передаточные функции системы будут иметь также различный вид в зависимости от заданных внешних воздействий. Так, при $\bar{Q}_1 \neq 0$ и $\bar{Q}_2 = 0$ имеем:

$$W_{\bar{Q}_2=0}^1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \quad (12)$$

$$W_{\bar{Q}_2=0}^2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A(p)}, \quad (13)$$

где $A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2$ — частотное характеристическое уравнение системы. При $\bar{Q}_1 \neq 0$ и $\bar{Q}_2 = 0$ получим, что координата $y_1(p)$ определяется выражением:

$$\bar{y}_1(p) = \frac{\bar{Q}_1(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + \bar{Q}_2 k_2}{A(p)}, \quad (15)$$

$$\bar{y}_2(p) = \frac{\bar{Q}_2(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + \bar{Q}_1 k_2}{A(p)}. \quad (16)$$

Передаточные функции позволяют определить физический смысл предельных значений динамической жесткости. Так, при $\bar{Q}_1 \neq 0$ и $\bar{Q}_2 = 0$ на частоте, определяемой (9), возникает бесконечно большое значение динамической жесткости, что соответствует режиму динамического гашения колебаний системы по координате \bar{y}_1 . При частоте, обозначенной (11), найдем, что определенное значение приобретает отношение амплитуд колебаний:

$$\frac{\bar{y}_1(p)}{\bar{y}_2(p)} = \frac{k_1 + k_2}{k_2}, \quad (17)$$

при котором реализуется одна из частных форм совместного движения по двум координатам.

Особенности определения динамических реакций связей между элементами системы. При введении дополнительных связей в структуру расчетной схемы технологической вибрационной машины (рис. 6) возникает вопрос определения динамических реакций в точках крепления упругих элементов, в данном случае пружины с жесткостью k_0 в тт. и 1. В предыдущем разделе изложена общая последовательность действий по определению динамических реакций связей в цепной системе с двумя степенями свободы. Общая схема действий при рассмотрении технического объекта по

схеме на рис. 6 остается неизменной, но реализация подхода требует ряда дополнений, связанных с введением новых координат.

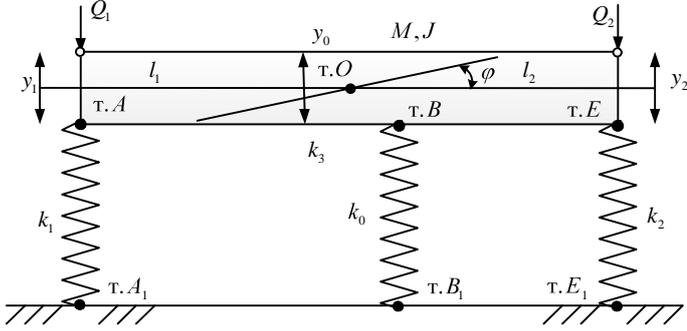


Рис. 6. Расчетная схема технологической вибрационной машины при введении дополнительной упругой связи k_0

Движение системы описывается в координатах y_0 и φ с использованием системы координат y_1, y_2 ; учитываются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_0 &= ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 - l_1\varphi, \\ y_2 &= y_0 + l_2\varphi, y_B = y_0 + l_0\varphi, \end{aligned} \quad (18)$$

где $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}$, l_1, l_2, l_0 — расстояния до соответствующих точек рабочего органа тт. , , .

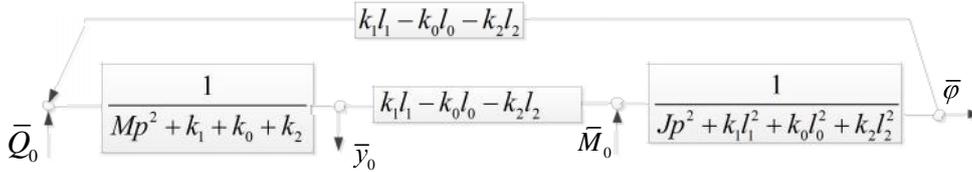


Рис. 7. Структурная математическая модель исходной системы по рис. 6 в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_0}{\bar{Q}_0} = \frac{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_0l_0^2 + \dots}{A(p)} \dots \quad (22)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{Q}_0} = \frac{\beta [Mp^2 + k_1 + k_0 + k_2] + \dots}{A(p)} \dots \quad (23)$$

$$A(p) = [Mp^2 + k_1 + k_0 + k_2] [Jp^2 + k_1l_1^2 + \dots + k_0l_0^2 + k_2l_2^2] - (k_1l_1 - k_0l_0 - k_1l_1)^2 \quad (24)$$

является частотным характеристическим уравнением.

2. Для практических приложений интерес представляет передаточная функция межпарциальных связей:

$$W'_{12}(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{y}_0} = \frac{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_0l_0^2 + k_2l_2^2 + \dots}{\beta [Mp^2 + k_1 + k_0 + k_2] + \dots} \quad (25)$$

1. В системе имеются внешние силовые возмущения Q_1 и Q_2 , отображаемые гармоническими синфазными функциями. Система уравнений движения в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ в операторной форме имеет вид:

$$\bar{y}_0 Mp^2 + \bar{y}_0(k_1 + k_0 + k_2) - \bar{\varphi}(k_1l_1 - k_2l_2 - k_0l_0) = \bar{Q}_0 = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad (19)$$

$$\bar{\varphi} Jp^2 + \bar{\varphi}(k_1l_1^2 + k_0l_0^2 + k_2l_2^2) - \bar{y}_0(k_1l_1 - k_2l_2 - k_0l_0) = \bar{M}_0 = \bar{Q}_1l_1 + \bar{Q}_2l_2. \quad (20)$$

Структурная схема системы (структурная математическая модель) приведена на рис. 7.

Передаточные функции системы могут быть определены из структурной схемы на рис. 7. Полагая наличие между силовыми факторами некоторой функциональной связи, характерной в целом для технологических машин с вибровозбудителями [1; 2], введем условие:

$$\bar{M}_0 = \beta \bar{Q}_0, \quad (21)$$

где β — коэффициент связности внешних воздействий.

Передаточные функции системы в этом случае принимают вид:

В частности, из (8) следует, что (25) на частоте:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_0 + k_2 + \beta [k_1l_1 - k_0l_0 - k_1l_1]}{M} \quad (26)$$

возможен режим движения рабочего органа при отсутствии угловых колебаний. Коэффициент связности β может при этом выступать в качестве настроечного параметра динамического состояния.

3. Введем координату движения точки крепления упругого элемента k_0 к рабочему органу в т. В в виде x и перейдем к системе координат y_0, φ , описывающих движения объекта на рис. 6:

$$\bar{x} = \bar{y}_0 - l_0\bar{\varphi}. \quad (27)$$

В этом случае система уравнений движения может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \bar{y}_0 \left[\left(M + \frac{J}{l_0^2} \right) p^2 + k_1a_1^2 + k_2b_1^2 \right] - \\ - \bar{x} \left[\frac{J}{l_0^2} + \frac{k_2b_1}{l_0} - \frac{k_1a_1}{l_0} \right] = \bar{Q}_0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{x} \left[\frac{J}{l_0^2} p^2 + \frac{k_1}{l_0^2} + k_0 + \frac{k_2}{l_0^2} \right] - \bar{y}_0 \left[\frac{J}{l_0^2} + \frac{k_2 b_1}{l_0} - \frac{k_1 a_1}{l_0} \right] = \bar{M}'_0, \quad (29)$$

где $a_1 = 1 - \frac{l_1}{l_0} = \frac{l_0 - l_1}{l_0}, b_1 = 1 + \frac{l_2}{l_0} = \frac{l_0 + l_2}{l_0}$.

В данном случае между силовыми факторами в разных системах координат существуют соотношения [13]:

$$\bar{Q}_0 = c(\bar{Q}_1 l_1 - \bar{Q}_2 l_2), \quad (30)$$

$$\bar{M}'_0 = (\bar{Q}_1(1 - l_1 c) + \bar{Q}_2(1 + l_2 c)). \quad (31)$$

Система уравнений (28), (29) может быть интерпретирована также в форме:

$$\bar{y}_0 \left[(M + Jc^2)p^2 + k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2 \right] - \bar{x} \left[Jc^2 + k_2 b_1 c - k_1 a_1 c \right] = \bar{Q}_0, \quad (32)$$

$$\bar{x} \left[Jcp^2 + k_1 c^2 + k_0 + k_2 c \right] - \bar{y}_0 \left[Jc^2 + k_2 b_1 c - k_1 a_1 c \right] = \bar{M}'_0. \quad (33)$$

Структурная схема системы в координатах \bar{y}_0, \bar{x} приведена на рис. 8.

Преобразуем структурную схему на рис. 8 к виду, при котором выделен объект, динамическое состояние которого оценивается по координате \bar{x} , как показано на рис. 9.

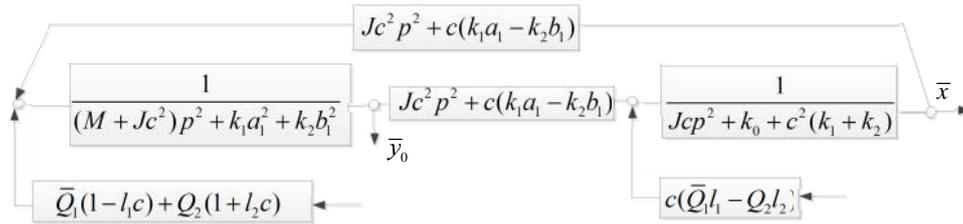


Рис. 8. Структурная схема системы в координатах \bar{y}_0 и \bar{x}

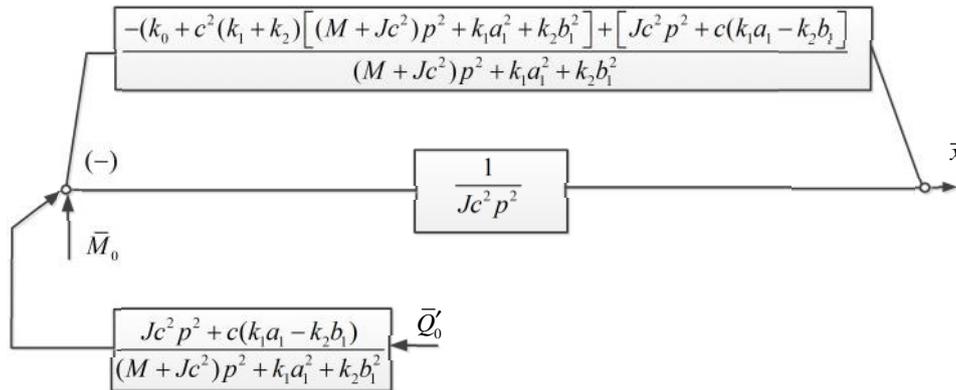


Рис. 9. Структурная схема с выделением объекта, динамическое состояние которого оценивается координатой \bar{x}

Цепь дополнительной обратной отрицательной связи по отношению к базовому элементу с передаточной функцией $\frac{1}{Jcp^2}$ в физическом смысле представляет собой приведенную динамическую жесткость в т. на схеме по рис. 6. После определения динамического смещения \bar{y}_B (координата \bar{x}) может быть найдена динамическая реакция в т. . Поскольку на систему действуют два возмущения, то в качестве первого приближения можно принять, что между \bar{Q}'_0 и \bar{M}'_0 существует связность, определяемая коэффициентом γ таким образом, что:

$$\bar{M}'_0 = \gamma \bar{Q}'_0. \quad (34)$$

Из структурной схемы в координатах \bar{y}_0 и \bar{x} следует, что:

$$W'_0(p) = \frac{\bar{x}}{\bar{Q}'_0} = \frac{\gamma \left[Jcp^2 + k_0 + c^2(k_1 + k_2) \right] + \left[Jc^2 p^2 + c^2(k_1 a_1 - k_2 b_1) \right]}{A(p)}, \quad (35)$$

где $A(p) = \left[(M + Jc^2)p^2 + k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2 \right] \left[Jc^2 p^2 + k_0 + \dots + c^2(k_1 + k_2) \right] - \left[Jc^2 p^2 + c(k_1 a_1^2 - k_2 b_1^2) \right]^2$ (36)

является характеристическим частотным уравнением.

Обозначим приведенную динамическую жесткость в т. в соответствие со схемой на рис. 6.

$$D_B(p) = \frac{\left[Jc^2 p^2 + c(k_1 a_1^2 - k_2 b_1^2) \right]^2 - \left[k_0 + c^2(k_1 + k_2) \right] \left[(M + Jc)p^2 + k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2 \right]}{(M + Jc^2)p^2 + \dots + k_1 a_1^2 + k_2 b_1^2}. \quad (37)$$

В свою очередь, смещение по координате \bar{y}_B составляет:

$$\bar{y}_B = \bar{Q}'_0 \cdot W'_0(p). \quad (38)$$

Таким образом:

$$\bar{R}_B = D(p)\bar{y}_1, \quad (39)$$

что представляет собой дробно-рациональное выражение, знаменатель которого определяется выражением:

$$\bar{R}_1 = (M + Jc)p^2 + k_1a_1^2 + k_2b_1^2 \cdot A(p), \quad (40)$$

а числитель:

$$\bar{R}_2 = \frac{[Jc^2p^2 + c(k_1a_1^2 - k_2b_1^2)]^2 - [k_0 + c^2(k_1 + k_2)] \times [(M + Jc)p^2 + k_1a_1^2 + k_2b_1^2]}{(M + Jc)p^2 + k_1a_1^2 + k_2b_1^2} \dots \quad (41)$$

Динамическая реакция в т. имеет три максимальных значения в связи с обнулением знаменателя и обладает двумя минимальными значениями, так как числитель имеет, в общем случае, две частоты обнуления.

Учет особенностей совместного действия возмущающих факторов. Рассматривается система по рис. 6 в координатах \bar{y}_1 и \bar{y}_2 и соотношения между внешними силами Q_1 и Q_2 при наличии коэффициента связности. Для построения математической модели системы запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы при учете дополнительного упругого элемента k_0 , закрепленного в т. . Отметим при этом, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} y_0 &= ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), y_1 = y_0 - l_1\varphi, \\ y_2 &= y_0 + l_2\varphi, y_B = y_0 + l_0\varphi, \end{aligned} \quad (42)$$

здесь $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}$.

Таким образом:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2, \quad (43)$$

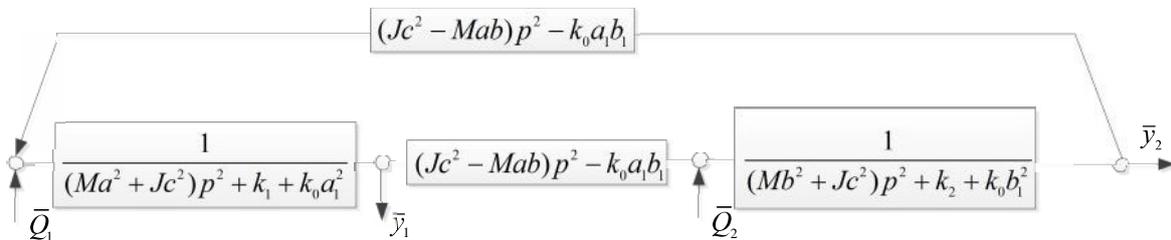


Рис. 9. Структурная схема (структурная математическая модель) исходной системы, приведенной на рис. 1

Используя структурную схему на рис. 9, найдем передаточные функции системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_0b_1^2 + \alpha [(Jc^2 - Mab)p^2 - k_0a_1b_1]}{A(p)}, \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_0y_B^2 + \frac{1}{2}k_1y_2^2. \quad (44)$$

Выражение (3) можно представить в виде:

$$= \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_0[a_1y_1 + b_1y_2]^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2, \quad (45)$$

где $a_1 = a - l_0c; b_1 = b + l_0c$.

Опуская промежуточные выкладки, запишем уравнения движения системы в координатах y_1, y_2 в виде:

$$\begin{aligned} y_1'(Ma^2 + Jc^2) + (k_1 + k_0a_1^2)y_1 - \\ - y_2'(Jc^2 - Mab) + k_0a_1b_1y_2 &= Q_1(t), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} y_2'(Mb^2 + Jc^2) + (k_2 + k_0b_1^2)y_2 - \\ - y_1'(Jc^2 - Mab_1) + k_0a_1b_1y_1 &= Q_2(t). \end{aligned} \quad (47)$$

После преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях система уравнений (46), (47) может быть записана в операторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 [(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_0a_1^2] - \\ - \bar{y}_2 [(Jc^2 - Mab)p^2 - k_0a_1b_1] &= \bar{Q}_1, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_0b_1^2] - \\ - \bar{y}_1 [(Jc^2 - Mab)p^2 - k_0a_1b_1] &= \bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Полагая, что исходная система (рис. 1) находится под действием двух связанных между собой внешних синфазных гармонических воздействий, где выполняется условие (α — коэффициент связности):

$$\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}_1, \quad (50)$$

построим структурную математическую модель систем или ее структурную схему. Полагается, что исходная система (рис. 1) может быть на основе динамических аналогий интерпретирована как эквивалентная в динамическом отношении система автоматического управления [6; 7], как это показано на рис. 9.

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{\alpha \left[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2 \right] + (Jc^2 - Mab)p^2 - k_0 a_1 b_1}{A(p)}. \quad (52)$$

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{\alpha \left[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2 \right] + (Jc^2 - Mab)p^2 - k_0 a_1 b_1}{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2 + \dots + \alpha \left[(Jc^2 - Mab)p^2 - k_0 a_1 b_1 \right]}. \quad (53)$$

Оценка динамических свойств системы в рассматриваемом случае позволяет отметить в системе наличие двух частот собственных колебаний, определяемых из характеристического частотного уравнения:

$$A(p) = \left[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2 \right] \times \left[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2 \right] - \left[(Jc^2 - Mab)p^2 - k_0 a_1 b_1 \right]^2 = 0. \quad (54)$$

Отметим также, что, как это следует из (51), в системе по координате \bar{y}_1 возможен режим динамического гашения колебаний на частоте:

$$\omega_1^2 = \frac{k_2 + k_0 b_1 (b_1 - \alpha a_1)}{Ma(b - \alpha a) + Jc^2(1 + \alpha)}. \quad (55)$$

Парциальная частота системы n_1^2 определяется выражением:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_0 a_1^2}{Ma + Jc^2}. \quad (55)$$

Соответственно по координате \bar{y}_2 получим:

$$\omega_2^2 = \frac{\alpha k_1 + a_1 k_0 \alpha (a_1 - b_1)}{Ma(\alpha a - b) + Jc^2(1 + \alpha)}. \quad (56)$$

Парциальная частота определится выражением:

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_0 b_1^2}{Mb + Jc^2}. \quad (57)$$

Режимы динамического гашения колебаний реализуются по каждой координате, т. е. по \bar{y}_1 и \bar{y}_2 ; при этом частоты динамического гашения колебаний уже не совпадают с парциальными частотами, как это наблюдается при действии одного возмущающего фактора. Отметим также, что при действии одного возмущения режим динамического гашения реализуется по координате, к которой приложено возмущающее воздействие.

Заключение

Предлагается метод построения математических моделей, позволяющих решать задачи оценки, контроля и изменения параметров динамического состояния объектов с дополнительными связями. Конкретно, такие связи возникают при введении в структуру систе-

мы дополнительных несимметрично располагаемых упругих элементов.

Показано, что такие введения связей существенно изменяют динамические свойства исходных систем, что приводит к проявлениям новых динамических эффектов, обладающих научной новизной и возможностями практического использования.

Предложен метод построения математических моделей, что связано с необходимостью использования специальной системы координат, обеспечивающей возможность определения необходимых динамических жесткостей.

Метод позволяет определять динамические реакции всех точек крепления упругих элементов.

Показаны возможности проявления и использования динамических эффектов в различных системах координат, что также представляет интерес для разработки и применения вибрационных технологических процессов.

1. Повидайло В.А. Вибрационные устройства в машиностроении. М.; Киев: Mashgiz. [Юж. отд.-ние], 1962. 111 с.
2. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968. 362 с.
3. Кашуба В.Б., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Динамические реакции в соединениях элементов механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2016. 331 с.
4. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Политехника, 2013. 319 с.
5. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
6. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
7. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование. Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
8. Ганиев Р.Ф. Волновые машины и технологии (Введение в волновую технологию). М.: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 192 с.
9. Пановко Г.Я. Лекции по основам теории вибрационных машин и технологий. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 192 с.
10. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: моногр. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. 569 с.
11. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Вьонг К.Ч. Рычажные связи в задачах коррекции динамического состояния вибростенда // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2018. Т. 22, № 9 (140). С. 28-41.
12. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Николаев А.В. Неудерживающие связи во взаимодействиях элементов систем: оценка динамических реакций связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2018. № 2 (58). С. 27-34.
13. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.

References

1. Povidajlo V.A. Vibration devices in mechanical engineering. M.; Kiev: Mashgiz. [Yuzh. otd.-nie], 1962. 111 p.

2. Byhovskij I.I. Bases of vibration technics theory. M.: Mashinostroenie, 1968. 362 p.
3. Kashuba V.B., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. Dynamical responses in connections of elements of mechanical oscillation systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 331 p.
4. Belokobyl'skij S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial and elastic ties. SPb.: Politekhnik, 2013. 319 p.
5. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Application theory of oscillations in tasks of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.
6. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Homenko A.P. Mechatronics approaches in dynamics of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
7. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling. Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
8. Ganiev R.F. Wave machines and technologies (Introduction in wave technology). M.: Nauch.-izd. centr «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», 2008. 192 p.
9. Panovko G.Ya. Lectures on bases theory of vibration machines and technologies. M.: MGТУ im. Baumana, 2008. 192 p.
10. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibroimpact hardening processes: monogr. Voronezh: IPC «Nauchnaya kniga», 2011. 569 p.
11. Eliseev S.V., Kuznesov N.K., Vyong K.Ch. Lever ties in tasks of correction of dynamical condition of shaker // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2018. T. 22, № 9 (140). P. 28-41.
12. Eliseev S.V., Bol'shakov R.S., Nikolaev A.V. Not-holding ties in interactions of systems elements: estimation of dynamical ties responses // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2018. № 2 (58). P. 27-34.
13. Lur'e A.I. Analytical mechanics. M.: GIFML, 1961. 824 p.

УДК 62-26:539.431.1

DOI: 10.18324/2077-5415-2019-1-15-21

Усталостная прочность сиффона и сферической оболочки в условиях циклического нагружения

К.Н. Фигура

Братский государственный университет, ул.Макаренко 40, Братск, Россия

figura_85@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0777-0089>

Статья поступила 12.01.2019, принята 6.02.2019

Ключевые слова: сиффон; сферическая оболочка; циклическое нагружение; усталостная прочность.

Fatigue strength of the bellows and spherical shell under cyclic loading conditions

K.N. Figura

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

figura_85@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0777-0089>

Received 12.01.2019, accepted 6.02.2019

In industry, bellows are used in pipe fittings, pipelines and sensors. Currently, a fundamentally new field of application of bellows as a source of vibration in mixers has appeared. The use of these shell elements, as well as vibroactivators created on the basis of