УДК 536.24 DOI: 10.18324/2077-5415-2019-1-57-60

Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], А.А. Федяев[2c]

[1]Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, Красноярск, Россия
[2]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Статья поступила 18.01.2019, принята 9.02.2019

В статье изложено аналитическое решение задачи, посвященной определению нестационарного температурного поля в существенно неоднородной конструкции. На практике такие сопряженные системы, как правило, являются многослойными. Применение строгих математических способов для их интегрирования в большинстве случаев оказывается весьма затруднительным. Это обусловлено, во-первых, тем, что конечные расчетные зависимости оказываются слишком громоздкими, а во-вторых, возникающими серьезными проблемами с нахождением собственных чисел на основе многострочных трансцендентных характеристических уравнений. Поэтому авторами данной работы предложен математический метод, основанный на замещении реальной системы условным телом, коэффициент теплопроводности материала которого изменяется экспоненциально по его толщине. Благодаря такому подходу удается получить строгое аналитическое решение на базе широко известных протабулированных функций Бесселя. Конечные зависимости являются вполне приемлемыми для проведения инженерно-технических вычислительных операций. Одной из важнейших особенностей рекомендуемого метода следует считать то, что на его основе можно существенно уменьшить количество слоев при переходе к эквивалентному замещающему телу.

Ключевые слова: многослойная конструкция; температурное поле; теплофизические свойства; коэффициент теплопроводности; аналитическое решение; собственные функции; собственные числа; функции Бесселя.

Analytical method for calculating a non-stationary temperature field with a variable thermal conductivity coefficient

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A.A. Fedyaev[2c]

[1]Siberian Federal University; 79, Svobodny Ave., Krasnoyarsk, Russia
[2]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]vidinsfu@mail.ru, [b]zlobinsfu@mail.ru, [c]vends1@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b]https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6233-3757
Received 18.01.2019, accepted 9.02.2019

The article presents an analytical solution of the problem dedicated to the determination of a non-stationary temperature field in a substantially inhomogeneous structure. In practice, such interconnected systems, as a rule, are multi-layered. The use of rigorous mathematical methods for their integration in most cases turns out to be very difficult. This is due, firstly, to the fact that the final calculated dependencies turn out to be too cumbersome, and secondly, the serious problems that arise with finding eigenvalues based on multiline transcendental characteristic equations. Therefore, the authors proposed a mathematical method based on the replacement of a real system with a conditional body, the coefficient of thermal conductivity of the material of which changes exponentially in its thickness. Thanks to this approach, it is possible to obtain a rigorous analytical solution based on the well-known tabulated Bessel functions. Finite dependencies are quite acceptable for engineering and technical computing operations. One of the most important features of the recommended method is that, based on it, it is possible to significantly reduce the number of layers during the transition to an equivalent replacement body.

Keywords: multilayer structure; temperature field; thermo-physical properties; thermal conductivity; analytical solution; eigenfunction; eigenvalue; Bessel function.

Введение

В большинстве случаев на практике элементы конструкций, подверженные нагреву или охлаждению, являются многослойными [1–4]. При этом каждый из слоев, образующих такую комбинированную систему, обладает своими теплофизическими свойствами. Определение нестационарных температурных полей в подобных неоднородных телах представляет весьма сложную математическую проблему, что обусловлено, в первую очередь, значительным количеством параметров характерных для таких задач.

Постановка и решение задачи. Если изменение некоторых свойств неоднородного вещества, например, коэффициента теплопроводности в зависимости от пространственной координаты, может быть аппроксимировано сравнительно простой монотонной элементарной зависимостью, то тогда целесообразно применить аналитический подход для исследования поставленной инженерной задачи. Для иллюстрации рекомендуемого авторами математического приема рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\left[\lambda(\mathrm{X})\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{X}}\right], \qquad (1)$$

$$0 \le \mathrm{Fo} < \infty\,; \quad 0 \le \mathrm{X} \le 1\,, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{X}} = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{X} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{X}} = -\mathrm{Bi}\vartheta \quad \text{при} \quad \mathrm{X} = 1\,, \qquad (4)$$

$$\vartheta(\mathrm{X},0) = 1 \quad \text{при} \quad \mathrm{Fo} = 0\,. \qquad (5)$$

Здесь использована общепринятая форма представления зависимых и независимых величин в безразмерном виде [5]. Из дифференциального уравнения (1) следует, что коэффициент теплопроводности материала анализируемого плоского тела является некоторой функцией пространственной координаты X, т. е. $\lambda = \lambda(\mathrm{X})$. Если $\lambda(\mathrm{X}) = 1$, т. е. этот коэффициент есть постоянная величина, то строгое аналитическое решение системы (1) – (5) известно [5], и его применение для технических вычислений не представляет трудности. Естественно, что при произвольном характере поведения функции $\lambda(\mathrm{X})$ получить теоретическое решение задачи (1) – (5) довольно сложно, однако в ряде случаев на этом направлении может быть достигнут вполне приемлемый положительный результат. Покажем такую возможность на примере, когда исходная функция $\lambda = \lambda(\mathrm{X})$ относится к классу показательных, а именно $\lambda = \exp(a\mathrm{X})$, где постоянная $a > 0$ либо $a < 0$. Очевидно, что при $a = 0$ исходная задача становится тривиальной, так как ее аналитическое решение, как уже указывалось, принимает простой вид [5; 11].

Изучим подробно вариант, когда $a = -1$, т. е. коэффициент теплопроводности материала неограниченной пластины монотонно уменьшается от максимального значения в центре тела $\lambda_{\max} = \lambda(0)$ до минимального — на ее поверхности $\lambda_{\min} = \lambda(1)$.

Итак, примем, что:

$$\lambda(\mathrm{X}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{X}}\,. \qquad (6)$$

С учетом условия (6) представим аналитическое решение системы уравнений (1) – (5) в виде бесконечного ряда:

$$\vartheta(\mathrm{X},\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(\mathrm{X}) \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (7)$$

где под $K_n(\mathrm{X})$ следует полагать собственные функции, а под числами μ_n — собственные значения поставленной задачи. Для определения функций $K_n(\mathrm{X})$ и корней μ_n необходимо исследовать соответствующую задачу Штурма – Лиувилля:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left[\lambda(\mathrm{X})y'\right] + \mu^2 y = 0\,, \qquad (8)$$

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{X} = 0\,, \qquad (9)$$

$$y' = -\mathrm{Bi}\cdot y \quad \text{при} \quad \mathrm{X} = 1\,. \qquad (10)$$

С учетом зависимости (6) дифференциальное уравнение (8) преобразуется к виду:

$$y'' - y' + \mu^2 \mathrm{e}^{\mathrm{X}} y = 0\,. \qquad (11)$$

Выполним предварительно некоторые математические операции по отношению к выражению (11). Введем новую пространственную координату на основе условия:

$$Z = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{X}}{2}}\,. \qquad (12)$$

Тогда уравнение (11) запишется в виде:

$$y'' - \frac{1}{Z}y' + 4\mu^2 y = 0\,. \qquad (13)$$

Далее используем подстановку:

$$y = \mathrm{Z}\cdot U\,, \qquad (14)$$

с помощью которой зависимость (13) принимает вид:

$$U'' + \frac{U'}{\mathrm{Z}} + \left(4\mu^2 - \frac{1}{\mathrm{Z}^2}\right)U = 0\,. \qquad (15)$$

Полученное дифференциальное уравнение (15) относится к классу уравнений Бесселя [6]. Общее его решение можно представить в форме [6–8]:

$$U = C_1 J_1(2\mu\mathrm{Z}) + C_2 Y_1(2\mu Z), \qquad (16)$$

где $J_1(2\mu Z)$ и $Y_1(2\mu Z)$ являются соответственно функциями Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка. Подробные табличные значения этих функций даны во многих справочниках, в частности в [6–8; 12].

Таким образом, с учетом (12) и (14) интеграл уравнения (11) может быть записан в виде:

$$y = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{X}}{2}}\left[C_1 J_1\left(2\mu \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{X}}{2}}\right) + C_2 Y_1\left(2\mu \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{X}}{2}}\right)\right], \qquad (17)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Следовательно, общее аналитическое решение уравнения (11) удается выразить в виде произведения элементарной показательной функции и специальных функций Бесселя. Постоянные интегрирования C_1 и

C_2 находятся на основе граничного условия симметрии искомого температурного поля (9) и предельного значения безразмерной температуры в центре тела $\vartheta(0,0)=1$. Исходя из этих требований, коэффициенты C_1 и C_2 будут равны:

$$C_1 = \frac{Y_0(2\mu)}{J_1(2\mu)Y_0(2\mu) - J_0(2\mu)Y_1(2\mu)}, \qquad (18)$$

$$C_2 = -\frac{J_0(2\mu)}{J_1(2\mu)Y_0(2\mu) - J_0(2\mu)Y_1(2\mu)}, \qquad (19)$$

где $J_0(2\mu)$ и $Y_0(2\mu)$ — соответственно функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка.

В итоге аналитическое решение задачи (8) – (9) в окончательном виде запишется:

$$y = e^{\frac{X}{2}} \left[\frac{Y_0(2\mu) J_1\left(2\mu\, e^{\frac{X}{2}}\right) - J_0(2\mu) Y_1\left(2\mu\, e^{\frac{X}{2}}\right)}{J_1(2\mu)Y_0(2\mu) - J_0(2\mu)Y_1(2\mu)} \right]. \qquad (20)$$

Используя это выражение и граничное условие 3-го рода на поверхности тела ($X = 1$) (10), можно вывести характеристическое уравнение для определения собственных значений поставленной задачи μ_n :

$$\frac{Y_0(\beta)J_1(K\beta) - J_0(\beta)Y_1(K\beta)}{Y_0(\beta)J_0(K\beta) - J_0(\beta)Y_0(K\beta)} = -\frac{K\beta}{2\,\mathrm{Bi}}, \qquad (21)$$

где $\beta = 2\mu$; $K = e^{0,5} = 1{,}6487$.

Если число $\mathrm{Bi} \to \infty$, т. е. граничное условие (4) вырождается в условие 1-го рода, то зависимость (21) существенно упрощается и принимает вид:

$$\frac{J_0(\beta)}{Y_0(\beta)} = \frac{J_1(K\beta)}{Y_1(K\beta)}. \qquad (22)$$

Если же $\mathrm{Bi} = 0$, т. е. граничное условие становится эквивалентным условию 2-го рода, то формула (21) также оказывается значительно проще:

$$\frac{J_0(\beta)}{Y_0(\beta)} = \frac{J_0(K\beta)}{Y_0(K\beta)}. \qquad (23)$$

Применяя аппроксимации, рекомендуемые в справочнике для функций Бесселя [7], удается вывести сравнительно несложные зависимости для вычисления корней уравнений (22) и (23), а именно:

$$\beta_n^2 - \frac{(n-0.5)\pi}{0.6487}\beta_n + 0.54332 = 0, \qquad (24)$$

$$\beta_n^2 - \frac{(n-1)\pi}{0.6487}\beta_n + 0.07584 = 0, \qquad (25)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Полученные выражения (24) и (25) позволяют рассчитывать β_n с высокой степенью точности. Погрешность вычислений по ним, как правило, не превышает тысячные доли процента. В таблице приведены значения первых шести корней β_n характеристического уравнения (21) для ряда чисел Bi, полученные численным методом.

Значения первых шести корней характеристического уравнения

$$\frac{Y_0(\beta)J_1(K\beta) - J_0(\beta)Y_1(K\beta)}{Y_0(\beta)J_0(K\beta) - J_0(\beta)Y_0(K\beta)} = -\frac{K\beta}{2\,\mathrm{Bi}}$$

при K =1.6487

Таблица 1

Bi	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
0	0	4.8277	9.6778	14.5231	19.3671	24.2107
0.5	0.8053	5.0128	9.7732	14.5878	19.4153	24.2492
1.0	1.0750	5.1792	9.8659	14.6503	19.4630	24.2875
5.0	1.7332	6.0109	10.4765	15.1076	19.8230	24.5825
10.0	1.9255	6.4452	10.9455	15.5342	20.1951	24.9059
25.0	2.0709	6.8472	11.5064	16.1677	20.8454	25.5426
50.0	2.1257	7.0110	11.7671	16.5093	21.2499	25.9930
100.0	2.1543	7.0984	11.9110	16.7068	21.4975	26.2864
500.0	2.1779	7.1706	12.0313	16.8746	21.7123	26.5473
1000.0	2.1790	7.1738	12.0367	16.8822	21.7219	26.5591
∞	2.1839	7.1890	12.0619	16.9176	21.7675	26.6184

Коэффициенты ряда A_n в решении (7) могут быть найдены из начального условия ($\mathrm{Fo} = 0$), т. е. на основе равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(X) = 1. \qquad (26)$$

При этом должно быть использовано свойство ортогональности функций (20).

Заключение

Полученное аналитическое решение может быть использовано при расчетах неоднородных конструкций с высокой точностью. Предложенный аналитический метод определения неустановившегося температурного поля в неоднородном теле может быть также применен для изучения нелинейных процессов нагрева изделий [9; 10].

Литература

1. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск. Изд-во Крас. политехн. ин-та, 1974. 144 с.

2. Иванов В.В., Видин Ю.В., Колесник В.А. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным теплом. Ростов-н/Д., Изд-во Рост. Ун-та, 1990. 159 с.

3. Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск, СФУ, 2014. 167 с.

4. Федяев А.А., Федяева В.Н., Видин Ю.В. Численные исследования неравномерного тепломассообмена при испарении в капиллярно-пористых телах // Вестн. Ассоциации выпускников КГТУ. Красноярск, 2007. Вып. 15. 182 с.

5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

6. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М., 1949. Т. 2. 219 с.

7. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 890 с.

8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

9. Видин Ю.В. Расчет температурного режима неоднородной пластины, нагреваемой излучением // Изв. вузов. Черная металлургия. 1981. № 11. 136 с.

10. Видин Ю.В. Начальная стадия теплопроводности тел с переменными свойствами // Физика и химия обработки материалов. 1983. № 1. 37 с.

11. Лыков А.В. Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.

12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

References

1. Vidin YU.V. Engineering methods of calculation of heat transfer processes. Krasnoyarsk. Izd-vo Kras. politekhn. in-ta, 1974. 144 p.

2. Ivanov V.V., Vidin YU.V., Kolesnik V.A. Processes of heating of multilayer bodies by radiant-convective heat. Rostov-n/D., Izd-vo Rost. Un-ta, 1990. 159 p.

3. Vidin YU.V., Ivanov V.V., Kazakov R.V. Engineering methods for calculating heat-exchange problems. Krasnoyarsk, SFU, 2014. 167 p.

4. Fedyaev A.A., Fedyaeva V.N., Vidin YU.V. Numerical studies of uneven heat and mass transfer during evaporation in capillary-porous bodies // Vestn. Associacii vypusknikov KGTU. Krasnoyarsk, 2007. Vyp. 15. 182 p.

5. Lykov A.V. Heat conduction theory. M.: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.

6. Vatson G.N. Theory of Bessel functions. M., 1949. T. 2. 219 p.

7. Handbook of special functions / pod red. M. Abramovica, I. Stigana. M.: Nauka, 1979. 890 p.

8. Yanke E., Ehmde F., Lyosh F. Special function. M.: Nauka, 1977. 342 p.

9. Vidin YU.V. Calculation of temperature regime of inhomogeneous plate heated by radiation // Izvestiya. Ferrous Metallurgy. 1981. № 11. 136 p.

10. Vidin YU.V. The initial stage of thermal conductivity of bodies with variable properties // Physics and Chemistry of Materials Treatment. 1983. № 1. 37 p.

11. Lykov A.V. Heat and mass transfer: spravochnik. M.: Ehnergiya, 1978. 480 p.

12. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics for researchers and engineers. M.: Nauka, 1968. 720 p.