

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 621.01:621.81:621:891

DOI: 10.18324/2077-5415-2018-4-7-12

Определение контактных давлений герметизации на этапе проектирования уплотнительных соединений

П.М. Огар^a, В.С. Федоров^b, А.С. Кожевников^c, К.Н. Фигура^d

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
^aogar@brstu.ru, ^bfedorov.v.s@yandex.ru, ^ckozhevnikovart@inbox.ru, ^duts@brstu.ru
^a<https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b<https://orcid.org/0000-0001-5507-307X>,
^c<https://orcid.org/0000-0003-4230-6991>^d<http://orcid.org/0000-0002-0777-0089>
 Статья поступила 2.11.2018, принята 16.11.2018

Рассмотрены вопросы обеспечения герметичности уплотнительных соединений. Известно, что для расчета герметичности на этапе проектирования необходимо знать режим истечения герметизируемой среды, который определяется числом Рейнольдса. Показано, что число Рейнольдса определяется отношением погонного массового расхода через уплотнительный стык к динамической вязкости уплотняемой среды. Зависимости относительной площади контакта, плотности зазоров в стыке и вероятности протекания среды от безразмерного силового упругогеометрического параметра f_q следует определять с учетом взаимного влияния микронеровностей шероховатой поверхности. Указанные контактные характеристики определяют функционал проницаемости C_w , который характеризует герметизирующую способность уплотнительного стыка. Показана их роль в разные периоды нагружения уплотнительного стыка безразмерной нагрузкой. Из зависимости функционала проницаемости C_u от безразмерного силового упругогеометрического параметра f_q можно выделить три зоны герметизации — начальной, за счет внедрения наиболее высоких неровностей; стабильной, за счет уменьшения плотности зазоров; эффективной, за счет слияния отдельных пятен контакта. Показано, что из-за слияния отдельных пятен контакта при $f_q \rightarrow f_{qe}$ вероятность протекания среды резко уменьшается. Для значения вероятности $\nu_k = 0.0001$ значения $f_{qe} = 0.50 \dots 0.60$, что соответствует относительной площади контакта $\eta = 0.58 \dots 0.63$. Данный результат хорошо согласуется с величиной относительной фактической площади контакта, полученной с использованием теории перколяции, при которой образуется непрерывный замкнутый кластер, т.е. обеспечивается перекрытие всех микроканалов в стыке.

Ключевые слова: герметичность; режим истечения среды; контактные давления герметизации; функционал проницаемости; относительная площадь контакта; плотность зазоров; вероятность протекания среды.

Determination of contact sealing pressures at the stage of sealing compounds design

P.M. Ogar^a, V.S. Fedorov^b, A.S. Kozhevnikov^c, K.N. Figura^d

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
^aogar@brstu.ru, ^bfedorov.v.s@yandex.ru, ^ckozhevnikovart@inbox.ru, ^duts@brstu.ru
^a<https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b<https://orcid.org/0000-0001-5507-307X>,
^c<https://orcid.org/0000-0003-4230-6991>^d<http://orcid.org/0000-0002-0777-0089>
 Received 2.11.2018, accepted 16.11.2018

The issues of ensuring the tightness of sealing compounds are considered. It is known that to calculate the tightness at the design stage, it is necessary to know the flow regime of the medium being sealed, which is determined by the Reynolds number. It is shown that the Reynolds number is determined by the ratio of the linear mass flow rate through the sealing joint to the dynamic viscosity of the medium to be sealed. The dependences of the relative contact area, the density of gaps in the joint, and the probability of medium flow from the dimensionless force elastic-geometric parameter f_q should be determined taking into account the mutual influence of the roughness of the rough surface. These contact characteristics determine the permeability functional C_w , which characterizes the sealing ability of the sealing joint. Their role is shown in different periods of loading of the sealing joint with a dimensionless load. From the dependence of the permeability functional C_u on the dimensionless force elastic-geometric parameter f_q , three sealing zones can be distinguished - the initial one, due to the introduction of the highest irregularities; stable, by reducing the density of the gaps; effective, due to the merger of individual contact patches. It is shown that due to the merging of individual contact spots with $f_q \rightarrow f_{qe}$, the probability of medium flow decreases sharply. For the probability value $\nu_k = 0.0001$, the value $f_{qe} = 0.50 \dots 0.60$, which corresponds to the relative contact area = 0.58 ... 0.63. This result is in good agreement with the value of the relative actual contact area obtained using the percolation theory, at which a continuous closed cluster is formed, i.e. overlapping of all microchannels in the joint is ensured.

Keywords: tightness; fluid flow; contact sealing pressures; permeability functional; relative contact area; gap density; medium flow probability.

Введение

Герметичность — это свойство соединений обеспечивать допустимую величину утечки, определяемую из условий нормальной работы различных систем и оборудования, безопасности людей, охраны окружающей среды. Для количественной оценки герметичности используют скорость утечки — массу или объем среды в единицу времени на единицу длины по периметру уплотнительного соединения. Более универсальной характеристикой является массовый расход, так как при использовании объема (или количества) среды дополнительно необходимо указывать ее давление и температуру. Герметичность стыка деталей уплотнительных соединений (УС) определяется функциональными параметрами герметизирующих поверхностей и сжимающими напряжениями (контактными давлениями герметизации), обеспечивающими требуемые контактные характеристики — относительную площадь контакта и плотность зазоров в стыке [1–3]. Обзор методов определения герметичности уплотнений подробно рассмотрен в монографии [2], однако, несмотря на множество методов определения герметичности, в основу существующих в арматуростроении нормативных документов (например, СТ ЦКБА 068-2008) положены эмпирические зависимости более чем полувековой давности, не связывающие величину утечек с величиной контактных давлений и поэтому не отвечающие требованиям ГОСТ 9544-2015 «Арматура трубопроводная. Нормы герметичности затворов» или техническим требованиям на проектирование уплотнительных соединений, где указаны величины допустимых утечек.

Для оценки герметизирующей способности уплотнительного стыка авторами [1–3] предложен безразмерный функционал проницаемости, который зависит от относительной площади контакта, плотности зазоров в стыке и степени слияния отдельных пятен контакта микронеровностей (вероятности протекания среды). Требуемое значение функционала проницаемости определяется допустимой величиной утечки, параметрами среды и геометрическими параметрами уплотнения.

Режимы течения рабочей среды через стык УС.

Рассмотрим часто встречающийся на практике случай — стационарное течение вязкой жидкости (или газа при числе Кнудсена $Kn \rightarrow 0$) под действием градиента давления, которое называют фильтрацией. При этом возможны вязкостный и турбулентный режимы течения среды. Переход от вязкостного режима к турбулентному обуславливается достижением критического значения числа Рейнольдса:

$$Re = \rho v d / \mu, \quad (1)$$

где ρ — плотность среды; v — скорость фильтрации; d — характерный размер, в качестве которого используют средний размер микроканалов, эквивалентный гидравлический радиус, средний размер неровностей и др. По данным [4], в извилистых капиллярах вследствие искривленности и периодического сужения и расширения каналов турбулизация потока происходит при $20 < Re < 200$. Автором [5; 6] установлено, что если $Re < 4 \dots 12$ — режим ламинарный; если $Re > 4 \dots 12$ — режим

турбулентный. Таким образом, следует, что в уплотнительном стыке турбулизация потока происходит при значительно меньших числах Рейнольдса, чем для гладких трубопроводов.

Для плоского уплотнительного стыка со средним диаметром d_m скорость фильтрации:

$$v = \frac{Q_v}{A} = \frac{Q_v}{\pi d_m r_h}, \quad (2)$$

где Q_v — объемный расход среды; A — площадь сечения по периметру уплотнения.

Если в качестве характерного размера в выражении (1) использовать гидравлический радиус r_h , то выражение (1) примет вид:

$$Re = \frac{\rho Q_v}{\pi d_m \mu} = \frac{G_l}{\mu}, \quad (3)$$

где G_l — погонный массовый расход среды.

Так как величина G_l задается при проектировании УС, можно заранее определить режим истечения рабочей среды, а затем рассчитать величину утечки в зависимости от приложенной нагрузки.

Алгоритм определения контактных давлений герметизации. Расчет герметичности рассмотрим на примере капиллярной модели уплотнительного стыка и вязкостного истечения среды.

Для определения массового расхода при вязкостном режиме широко используется формула Пуазейля для цилиндрического трубопровода круглого сечения:

$$G = \frac{\pi r^4 \rho_{\Delta} P}{8 \eta l}, \quad (4)$$

где r — радиус сечения трубопровода; ρ, η — вязкость и плотность среды; $\Delta P = p_1 - p_0$ — перепад давлений; l — длина трубопровода.

В работе [2] показано, что для трубопроводов с произвольными сечениями, какими являются микроканалы в уплотнительном стыке, можно воспользоваться понятием гидродинамического радиуса:

$$r_h^4 = \frac{4S^3}{\pi P^2}, \quad (5)$$

где S и P — площадь и периметр сечения микроканала. Выражение (5) хорошо согласуется с литературными данными [7–9].

Для дискретной модели шероховатости средние значения S_l и P_l на единицу длины профиля можно определить, исходя из объема зазоров межконтактного пространства и относительной площади контакта [2]:

$$S_l = \frac{V_3}{A_c} = R_{\max} \Lambda; \quad (6)$$

$$P_l = (1 - \eta) \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta},$$

где β — средний угол наклона профиля поверхности.

Для реальных углов можно считать:

$$P_l = 2(1 - \eta). \quad (7)$$

Уплотнительный стык шероховатых поверхностей с множеством пересекающихся микроканалов представим как пористое тело, образованное двумя шероховатыми поверхностями, с исходной высотой

$$R_{\max} = R_{\max 1} + R_{\max 2}.$$

Считаем, что при установившемся течении среды распределение давления во всех плоскостях, совпадающих с градиентом давления, одинаковое и изменяется от p_1

при r_1 до p_0 при r_2 на входе и выходе пористого тела [10]. Так как все сечения, перпендикулярные градиенту давления, эргодичны, а поток среды через них при установившемся течении постоянный, общая утечка через стык:

$$G = \sum_{i=1}^N G_i = N \bar{G} K, \quad (8)$$

где $N = \pi d_m n v_k$ — число микроканалов, по которым происходит утечка; n — число микроканалов на единицу длины; v_k — вероятность протекания среды; G_i — утечка через i -й микроканал; \bar{G} — массовый и объемный расход через микроканал, определенный через средние значения функционалов S и P ; $K = K_f K_S$; K_f — коэффициент, учитывающий потери, обусловленные конструктивными элементами и местными преградами (сужением, расширением и т. п.); K_S — коэффициент, учитывающий распределение величин S и P . В первом приближении можно принять $K_f = 1$, $K_S = 1$.

С учетом выражений (4) и (5):

$$\bar{G} = \frac{\pi \rho \Delta p}{8 \eta l} \cdot \frac{4 S_l^3}{\pi P_l^2 n},$$

где второй множитель определяет гидравлический радиус для микроканала с произвольным сечением.

Подставляя полученное выражение в (2) и учитывая число микроканалов, по которым происходит утечка, получим:

$$G = \frac{\pi d_m}{2l} \cdot \frac{\rho \Delta p}{\mu} \cdot \frac{S_l^3 v_k}{P_l^2},$$

или, с учетом (6) и (7) для интенсивности утечки:

$$G_l = \frac{G}{\pi d_m} = \frac{R_{\max}^3 \rho \Delta p}{2l \mu} \cdot \frac{\Lambda^3 v_k}{4(1 - \eta)^2}, \quad (9)$$

где второй множитель представляет собой функционал проницаемости C_u , который характеризует герметизирующую способность стыка и зависит от параметров микрогеометрии и контактного давления, определяющего контактные характеристики стыка Λ , η , v_k .

Выражение (9) можно представить в виде:

$$Re^* \cdot \mu = C_f \cdot C_u, \quad (10)$$

где Re^* — требуемое число Рейнольдса, определяемое выражением (3);

$$C_f = \frac{R_{\max}^3 \rho \Delta p}{2l \mu}, \quad C_u = \frac{\Lambda^3 v_k}{4(1 - \eta)^2}. \quad (11)$$

При проектировании уплотнительного соединения удобно, исходя из заданных ρ , p_1 , p_0 , μ и назначенных d_m , l и R_{\max} для требуемого значения Re^* из уравнений (10) и (11), определить требуемый функционал проницаемости:

$$C_u^* = \frac{2l \mu^2 Re^*}{R_{\max}^3 \rho \Delta p}, \quad (12)$$

а затем из зависимостей $C_u(f_q)$ определить безразмерный силовой упругогеометрический параметр f_q , обеспечивающий заданный уровень C_u^* , и, следовательно, заданную величину утечки G_l .

Вопросы определения относительной площади контакта и плотности зазоров в стыке, входящих в функционал проницаемости C_u , для разных видов контакта шероховатых поверхностей рассмотрены в работах [1–3; 11].

На рис. 1 и 2 представлены типовые зависимости $\eta(f_q)$ и $\Lambda(f_q)$ для упругого контакта шероховатых поверхностей для разных значений параметров p и q опорной кривой профиля, которая описывается регуляризованной бета-функцией.

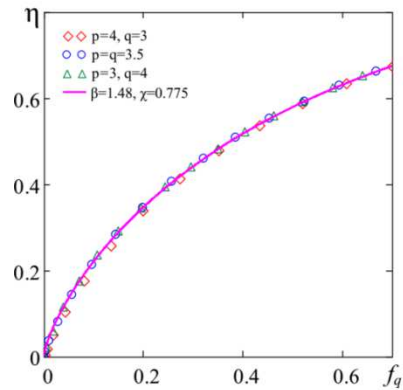


Рис. 1. Зависимость относительной площади контакта от безразмерного параметра f_q

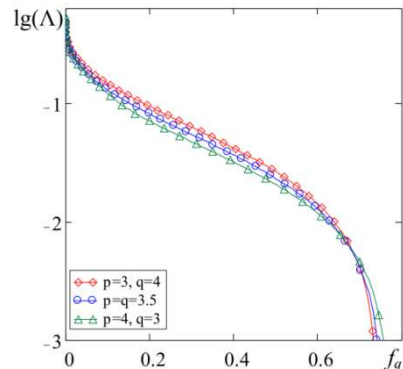


Рис. 2. Зависимость плотности зазоров в стыке от безразмерного параметра f_q

Таким образом (рис. 1), зависимости $\eta(f_q)$ для разных значений параметров p и q практически сливаются в одну линию. Поэтому для инженерных расчетов целесообразно их аппроксимировать уравнением:

$$\eta = 1 - \exp(-1,48 f_q^{0,775}), \quad (13)$$

которое достаточно точно их описывает и рекомендуется для инженерных расчетов относительной площади при упругом контакте. Из предложенной зависимости следует, что $\eta \rightarrow 1$ при $f_q \rightarrow \infty$, что согласуется с исследованиями почти полного контакта между шероховатыми поверхностями [12–16].

Рассмотрим определение вероятности протекания среды через уплотнительный стык, которая определяется степенью слияния отдельных пятен контакта. Авторами [1; 3] для этого использована модель отдельной неровности (рис. 1), которая описывается выражением:

$$z(x, y) = v + \omega[f(x) + f(y)], \quad (14)$$

где $x = \frac{2X}{S_{mx}}, \quad y = \frac{2Y}{S_{my}}, \quad z = \frac{Z}{R_{max}},$

$$S_{mx} = \sqrt{A_{ci} K_s}, \quad S_{my} = \sqrt{A_{ci} / K_s}, \quad K_s = S_{mx} / S_{my},$$

$$f(t) = \begin{cases} 0,5 - t, & |t| \leq 0,5, \\ (1 - |t|)^2, & 0,5 \leq |t| \leq 1. \end{cases}$$

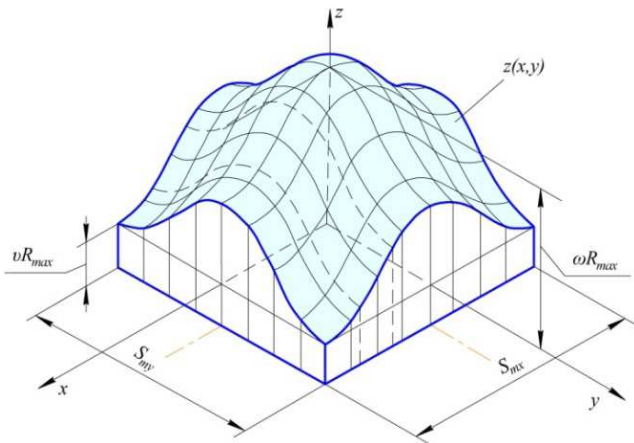


Рис.3. Модель отдельной неровности

Для данной неровности распределение материала по высоте ωR_{max} линейное, как и для сферического сегмента при $R \gg R_{max}$. Сечение неровности на уровне $v + 0,5\omega$ касается контура неровности. При $\eta_i > \eta_i^*$ для двух соседних неровностей будет происходить их слияние.

Допустим, что плоский уплотнительный стык длиной πd_m и шириной l состоит из k рядов неровностей (рис. 4).

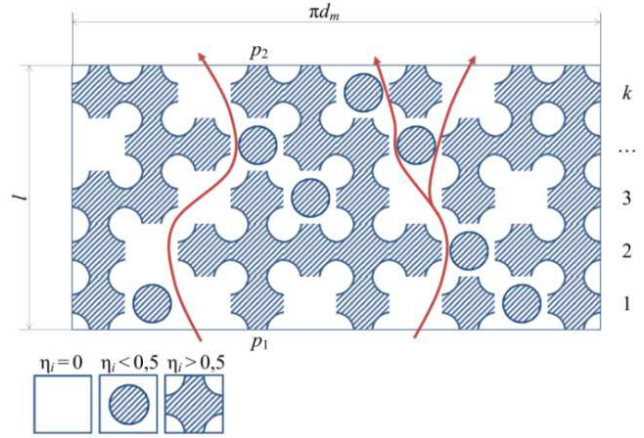


Рис. 4. Схема уплотнительного стыка

Вероятность протекания среды [1; 3]:

$$v_k(\varepsilon) = \begin{cases} (1 - x^*), & x^* < \frac{1}{3}; \\ 3^{k-1} (1 - x^*)^k, & x^* \geq \frac{1}{3}; \end{cases} \quad (15)$$

где k — число рядов микронеровностей по ширине зоны уплотнения;

$$x^*(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon x_i^*(\varepsilon, u) \varphi'(u) du;$$

$$x_i^*(\varepsilon, u) = \begin{cases} 0, & \eta_i(\varepsilon, u) < \eta_i^*; \\ 1, & \eta_i(\varepsilon, u) \geq \eta_i^*; \end{cases}$$

$\eta_i^* = 0,5 \dots 0,52$ — критическое значение η_i .

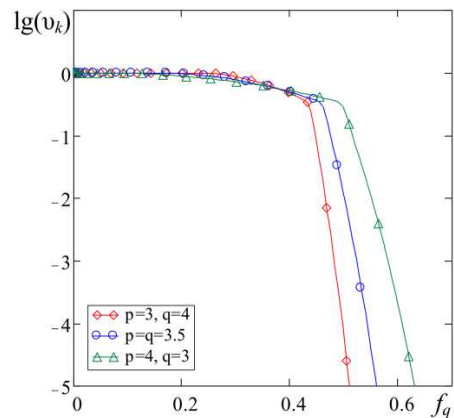


Рис. 5. Зависимость вероятности протекания среды v_k от безразмерного параметра f_q

На рис. 5 представлены зависимости $v_k(f_q)$ для разных значений параметров p и q порной кривой профиля.

Типовые зависимости $C_u(f_q)$ с учетом и без учета взаимного влияния неровностей представлены на рис. 6.

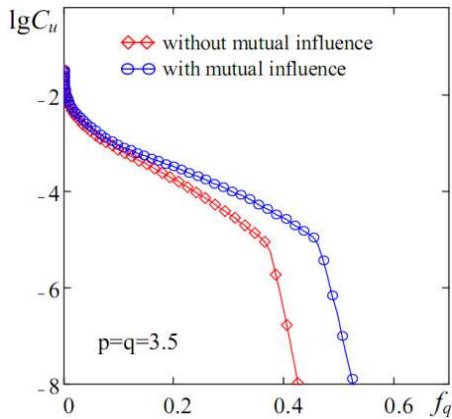


Рис. 6. Зависимости функционала проницаемости C_u от силового упругогеометрического параметра f_q

Из графических зависимостей (рис. 6) следует наличие трех зон герметизации: а) начальной ($f_q \leq 0.05$), за счет внедрения наиболее высоких неровностей; б) стабильной ($0.05 \leq f_q \leq f_{qe}$), за счет уменьшения плотности зазоров; в) эффективной ($f_q > f_{qe}$), за счет слияния отдельных пятен контакта.

Значение f_{qe} характеризуется началом резкого уменьшения функционала проницаемости (рис. 6) из-за уменьшения вероятности проникновения среды (рис. 5). Для заданного уровня вероятности протекания среды, например, $v_k = 0.0001$, значения $f_{qe} = 0.50..0.60$. С учетом выражения (13), это происходит при относительной площади контакта $\eta = 0.58..0.63$, для $p=q=3.5$ имеем $\eta = 0.60$. Данный результат хорошо согласуется с данными [17; 18], полученными с использованием теории перколяции (проникновения), которые определяют значение относительной фактической площади контакта, при которой образуется непрерывный замкнутый кластер, т.е. обеспечивается перекрытие всех микроканалов в стыке.

Заключение

1. Для прогнозирования (расчета) величины утечки на этапе проектирования необходимо знать режим истечения герметизируемой среды, который определяется числом Рейнольдса. Показано, что число Рейнольдса определяется отношением погонного массового расхода через уплотнительный стык к динамической вязкости уплотняемой среды.

2. Герметизирующая способность уплотнительных соединений определяется контактными характеристиками: относительной площадью контакта, плотностью зазоров в стыке и степенью слияния отдельных пятен контакта, которая определяет вероятность протекания среды и является наиболее эффективной характеристикой.

3. Относительная площадь контакта и плотность зазоров в стыке определены с учетом взаимного влияния неровностей, значения которых дают запас по герметичности в сравнении со значениями, полученными без учета взаимного влияния.

4. Гарантированная герметичность в большой мере зависит от распределения неровностей по высоте шероховатого слоя и обеспечивается при относительной площади контакта в стыке $\eta = 0.58..0.63$. Этот результат хорошо согласуется с данными, полученными при использовании теории перколяции.

Литература

- Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
- Огар П.М., Тарасов В.А. Проектирование затворов специальной трубопроводной арматуры. Братск: Изд-во БрГУ, 2014. 191 с.
- Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study // Chapter in: Contact and Fracture Mechanics, Pranav H. Darji, ed. 2018.
- Тимофеев Д.П. Кинетика адсорбций. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 252 с.
- Косинский В.В. Определение коэффициента проницаемости пористых тел при пропитке вязкими жидкостями под давлением // *Металлургия: тр. запорожской гос. инж. акад.* 2006. Вып. 13. С. 55-59.
- Косинский В.В. Нелинейные законы Дарси и критерий Рейнольдса при течении сжимаемых жидкостей под высоким давлением в пористых телах // *Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении.* 2007. № 1. С. 60-68.
- Башта Т.М., Мендельсон Д.А., Огар П.М., Шифрин С.Н. Расчет утечек газа через затвор пневмоклапана // *Эксплуатационная надежность планера и систем воздушных судов: сб. ст. Киев: КИИГА, 1981. С. 85-93.*
- Дэшман С. Научные основы вакуумной техники. М.: Мир, 1964. 715 с.
- Пипко А.И., Плисковский В.А. Конструирование и расчет вакуумных систем. М.: Энергия, 1979. 504 с.
- Дараган В.Л., Котов Ю.А., Мельников Г.Н., Пустостогов А.В., Старшинов В.И. Расчет потерь давления при течении газа через пористые материалы // *Инженерно-физический журн.* 1970. Т. 26, № 5. С. 787-794.
- Ogar P.M., Gorokhov D.B., Kozhevnikov A.S. The density of gaps in the seal joint in elastic contact of microasperities / in Proc. 2nd International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2015). Paris, 2015. P. 177-180.
- Hyun S., Robbins M.O. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths // *Tribology Int.* 2007. Vol. 40. P. 1413-1422.
- Yeo C.-D., Katta R.R., Lee J., Polycarpou A.A. Effect of asperity interactions on rough surface elastic contact behavior: Hard film on soft substrate // *Tribology Int.* 2010. Vol. 43. P. 1438-1448.
- Xu Y., Jackson R.L., Marghitu D.B. Statistical model of nearly complete elastic rough surface contact // *Int. J. Solids & Structures.* 2014. Vol. 51. P. 1075-1088.
- Yastrebov V. A., Ancaix G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: Evolution of the contact area // *Int. J. Solids & Structures.* 2015. Vol. 52. P. 83-102.
- Xu Y., Jackson R.L. Statistical models of nearly complete elastic rough surface contact-comparison with numerical solutions // *Tribology Int.* 2017. Vol. 105. P. 274-291.
- Тихомиров В.П., Горленко О.А. Критерий герметичности плоских сопряжений // *Трение и износ.* 1989. Т. 10, № 2. С. 214-218.

18. Тихомиров В.П., Порошин В.В., Горленко О.А., Измеров М.А. Герметичность разъемных неподвижных соединений. М.: МГИУ, 2014. 276 с.

References

1. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in the hermetology of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.
2. Ogar P.M., Tarasov V.A. Design valves of special pipe fittings. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2014. 191 p.
3. Ogar P., Belokobylsky S., Gorokhov D. Contact mechanics of rough surfaces in hermetic sealing study // Shapter in: Contact and Fracture Mechanics, Pranav H. Darji, ed. 2018.
4. Timofeev D.P. Kinetics of adsorption. M.: Izd-vo AN SSSR, 1962. 252 p.
5. Kosinskij V.V. Determination of the permeability coefficient of porous bodies impregnated with viscous liquids under pressure // Metallurgiya: tr. zaporozhskoj gos. inzh. akad. 2006. Vyp. 13. P. 55-59.
6. Kosinskij V.V. Nonlinear Darcy laws and Reynolds criterion for the flow of compressible fluids under high pressure in porous bodies // New materials and technologies in metallurgy and machine building. 2007. № 1. P. 60-68.
7. Bashta T.M., Mendel'son D.A., Ogar P.M., Shifrin S.N. Calculation of gas leaks through the pneumatic valve // Ekspluatatsionnaya nadezhnost' planera i sistem vozduzhnyh sudov: sb. st. Kiev: KIIGA, 1981. P. 85-93.
8. Dehshman S. Scientific basics of vacuum technology. M.: Mir, 1964. 715 p.
9. Pipko A.I., Pliskovskij V.A. Design and calculation for vacuum systems. M.: Energiya, 1979. 504 p.
10. Daragan V.L., Kotov Yu.A., Mel'nikov G.N., Pustostogorov A.V., Starshinov V.I. Calculation of pressure loss during gas flow through porous materials // Journal of Engineering Physics. 1970. T. 26, № 5. P. 787-794.
11. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Kozhevnikov A.S. The density of gaps in the seal joint in elastic contact of microasperities / in Proc. 2nd International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2015). Paris, 2015. P. 177-180.
12. Hyun S., Robbins M.O. Elastic contact between rough surfaces: Effect of roughness at large and small wavelengths // Tribology Int. 2007. Vol. 40. P. 1413-1422.
13. Yeo C.-D., Katta R.R., Lee J., Polycarpou A.A. Effect of asperity interactions on rough surface elastic contact behavior: Hard film on soft substrate // Tribology Int. 2010. Vol. 43. P. 1438-1448.
14. Xu Y., Jackson R.L., Marghitu D.B. Statistical model of nearly complete elastic rough surface contact // Int. J. Solids & Structures. 2014. Vol. 51. P. 1075-1088.
15. Yastrebov V. A., Anciaux G., Molinari J.-F. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: Evolution of the contact area // Int. J. Solids & Structures. 2015. Vol. 52. P. 83-102.
16. Xu Y., Jackson R.L. Statistical models of nearly complete elastic rough surface contact-comparison with numerical solutions // Tribology Int. 2017. Vol. 105. P. 274-291.
17. Tihomirov V.P., Gorlenko O.A. Criterion for tightness of flat mates // Friction and Wear. 1989. T. 10, № 2. P. 214-218.
18. Tihomirov V.P., Poroshin V.V., Gorlenko O.A., Izmerov M.A. Tightness of detachable fixed connections. M.: MGIU, 2014. 276 p.