УДК 621.01:621.81:621:891 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-3-7-13

Применение упрощенной модели слоистого упругого тела для описания внедрения в него сферического индентора

П.М. Огар[a], А.С. Кожевников[b], И.В. Игнатьев[c]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]ogar@brstu.ru,[b]kozhevnikovart@inbox.ru, [c]uts@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0003-4230-6991,
[c]https://orcid.org/0000-0001-8595-2841
Статья поступила 20.06.2018, принята 28.07.2018

На основании упрощенной жесткостной модели слоистого упругого тела предложена инженерная методика определения параметров контакта при внедрении в него сферического индентора. В основу модели положена зависимость перемещения точек полупространства по оси симметрии от величины приложенной распределенной нагрузки. Определены приведенный модуль упругости и коэффициент Пуассона в зависимости от упругих свойств материалов основания и покрытия, толщины покрытия и радиуса площадки контакта. Приведены выражения для определения параметров контакта при внедрении в слоистое тело сферического индентора. Проведено сравнение полученных результатов с точным решением пространственной осесимметричной задачи для описания напряженно-деформированного состояния в упругом слое при внедрении в него сферического индентора, полученным А.П. Макушкиным с использованием метода интегрального преобразования Фурье–Бесселя. Показано, что наилучшее совпадение результатов по предлагаемой методике с точным решением имеет место при определении величины внедрения сферического индентора. Максимальная погрешность при этом не превысила 10 %, а средняя погрешность для приведенных значений относительного внедрения составила 4,7 %. Указано, что систематическая погрешность при определении радиуса площадки контакта и максимального контактного давления связана с отличием распределения контактного давления от «герцевского». Учет этого фактора в рамках жесткостной модели слоистого тела требует дополнительных исследований. Анализ сравнения полученных результатов с результатами точных решений позволяет рекомендовать предлагаемую инженерную методику к практическому использованию.

Ключевые слова: слоистое упругое тело; слоистое полупространство; переменный модуль упругости; внедрение сферы;характеристики контакта.

The use of a simplified model of layered elastic body for describing the introduction of a spherical indenter in it

P.M. Ogar[a], A.S. Kozhevnikov[b], I.V. Ignatyev[c]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]ogar@brstu.ru, [b]kozhevnikovart@inbox.ru, [c]uts@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0003-4230-6991,
[c]https://orcid.org/0000-0001-8595-2841
Received 20.06.2018, accepted 28.07.2018

On the basis of a simplified rigid model of a layered elastic body, an engineering technique for determining the parameters of a contact is proposed for the introduction of a spherical indenter into it. The model is based on the dependence of the displacement of the points of the half-space along the axis of symmetry on the magnitude of the applied distributed load. The reduced elasticity modulus and the Poisson's ratio are determined depending on the elastic properties of the base and coating materials, the thickness of the coating and the radius of the contact area. Expressions are given for determining the parameters of a contact when a spherical indenter is introduced into a layered body. The obtained results are compared with the exact solution of the spatial axisymmetric problem for describing the stress-strain state in an elastic layer when a spherical indenter is introduced into it. The solution was obtained by A.P. Makushkin with using the Fourier-Bessel integral transformation method. It is shown that the best agreement between the results of the proposed method and the exact solution takes place when determining the value of the introduction of a spherical indenter. The maximum error in this case did not exceed 10%, and the average error for the given values of the relative introduction was 4.7%. It is indicated that the systematic error in determining the radius of the contact area and the maximum contact pressure is related to the difference in the distribution of the contact pressure from the "Hertzian" one. Accounting for this factor within the rigid model of a layered body requires additional studies. An analysis of the comparison of the results obtained with the results of exact solutions makes it possible to recommend the proposed engineering method for practical use.

Key words: layered elastic body; layered half-space; variable modulus of elasticity; sphere indentation; contact characteristics.

Введение

В настоящее время практически исчерпаны возможности повышения ресурса соединений деталей машин за счет конструктивного исполнения или изменения сортамента материалов. Перспективным направлением улучшения герметизирующей способности уплотнительных соединений и характеристик узлов трения, является нанесение на контактирующие поверхности различных покрытий, или формирование модифицированных слоев [1]. Опыт эксплуатации соединений с покрытиями показывает, что толщина покрытия также определяет их эксплуатационные свойства [2]. Отсутствие теории взаимодействия шероховатых поверхностей с покрытиями не позволяет прогнозировать характеристики узлов трения и герметичности уплотнений на стадии проектирования, что приводит к дорогостоящим и трудоемким затратам.

В рамках теории упругости наличие покрытия означает, что упругое тело следует рассматривать с изменяющимися значениями модуля упругости и коэффициента Пуассона в зависимости от расстояния до поверхности [3].

Состояние проблемы. Контактные задачи для тел с покрытиями рассмотрены в работах [2–7 и др.], которые можно разделить на три группы: аналитические, численные и численно-аналитические. Недостатком указанных работ являются трудности при использовании их результатов для решения практических задач трибологии и герметологии. Решение осесимметричной контактной задачи для упругого слоя, лежащего на жестком основании приведено в работе [8] и может представлять практический интерес при использовании полимерных покрытий.

Отдельную группу решения контактных задач составляют инженерные методы основанные на представлении слоистого тела, как топокомпозита — конструкции с особыми механическими свойствами [9; 10]. В эту же группу следует отнести метод, основанный на жесткостной модели слоистого тела [11–14].

Перемещения точек внутрь однородного полупространства. Зависимость перемещения точек по оси симметрии от величины приложенной распределенной нагрузки положена в основу жесткостной модели слоистого тела, поэтому рассмотрим однородное полупространство при нагружении его осесимметричной «герцевской» нагрузкой:

$$p(r) = p_0\left(1 - r^2/a^2\right)^{0.5}, \quad 0 \le r \le a\,, \qquad (1)$$

где $p_0 = 1.5p_m$, p_m — среднее давление, общая нагрузка $P = p_m \cdot \pi a^2$.

Перемещения точек по оси нагружения однородного полупространства при использовании потенциальных функций Буссинеску определяются выражениями [15]:

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left[2(1-\nu)\psi - z\frac{d\psi}{dz}\right], \psi = \iint_s p(r)\frac{1}{R}rdrd\varphi\,,$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}\,. \qquad (2)$$

С учетом выражения (1) и того, что $\rho = r/a$ и $\bar{z} = z/a$, после интегрирования имеем:

$$\psi = \frac{\pi p_0 a}{1.5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}^2}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ 1.5;\ 2.5;\ \frac{1}{1+\bar{z}^2}\right), \qquad (3)$$

где ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Подставляя выражение (3) в (2) и учитывая, что $\dfrac{d\psi}{dz} = \dfrac{d\psi}{ad\bar{z}}$, получим:

$$u_z = \frac{p_0 a}{E^*}K(\bar{z},\beta,\nu) \qquad (4)$$

$$K(\bar{z},0.5,\nu) = \operatorname{arcctg}\bar{z} + \frac{\nu}{1-\nu}\bar{z}(1 - \bar{z}\operatorname{arcctg}\bar{z}), \qquad (5)$$

где $E^* = E/\left(1-\nu^2\right)$.

Упростим обозначения, приняв:

$$K_i(0,\nu_i) = K_i(0), \qquad K_i(\bar{\delta},\nu_i) = K_i(\bar{\delta}). \qquad (6)$$

Как показал анализ, функция $K(\bar{z})$ в незначительной мере зависит от значений коэффициента Пуассона. При этом $K_i(0) = \pi/2$, при $\bar{z} \to \infty$ $K(\bar{z}) \to 0$.

Упругие характеристики слоистого полупространства при нагружении его осесимметричной нагрузкой. Рассмотрим слоистое упругое тело (рис. 1), состоящее из покрытия толщиной δ с упругими характеристиками ν_1 и E_1 и основного материала с упругими характеристиками ν_0 и E_0 и нагружено осесимметричной нагрузкой (1).

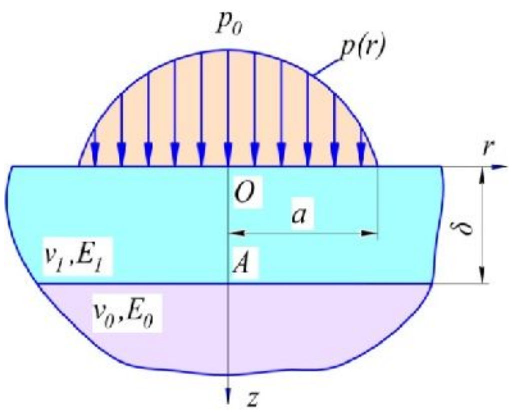


Рис. 1. Схема нагружения слоистого полупространства

С использованием жесткостной модели слоистого тела для приведенного модуля упругости и коэффициента Пуассона в работах [12; 13] получено:

$$E^*_{01} = E^*_1 \cdot F_1\,; \qquad (7)$$

$$F_{1\delta} = K_1(0)\left[\frac{\left(K_1(0) - K_1(\bar{\delta})\right)^2}{K_{01}(0) - K_{01}(\bar{\delta})} + K_1(\bar{\delta})\frac{K_0(\bar{\delta})}{K_{01}(\bar{\delta})} \cdot I_e\right]^{-1}, \qquad (8)$$

$$\nu_{01} = \nu_1 + (\nu_0 - \nu_1)\frac{1 - F_1^{-1}}{1 - I_e}\,, \qquad (9)$$

где $I_e = E_1^* / E_0^*$, $I_e = I\left(1-\nu_0^2\right)/\left(1-\nu_1^2\right)$, $I = E_1 / E_0$.

Аналогичный результат с использованием жесткостной модели слоистого тела получен при внедрении жесткого сферического индентора [12; 13]:

$$E_{01}^* = E_1^* \cdot F_{1R}\,; \qquad (10)$$

$$F_{1R} = K_1(0)\left[\frac{\left(K_1(0)-K_1\left(\bar{\delta}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(K_{01}(0)-K_{01}\left(\bar{\delta}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} + K_1\left(\bar{\delta}\right)\left(\frac{K_0\left(\bar{\delta}\right)}{K_{01}\left(\bar{\delta}\right)}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot I_e\right]^{-1}; \qquad (11)$$

$$\nu_{01} = \nu_1 + \left(\nu_0 - \nu_1\right)\frac{1-F_{1R}^{-1}}{1-I_e}\,. \qquad (12)$$

Как показали расчеты по выражениям (9) и (12), полученные результаты при нагружении слоистого тела осесимметричной распределенной нагрузкой и при внедрении в него сферического индентора отличаются не более чем на 1 %, поэтому в дальнейшем рекомендуется использовать F_1.

При выводе выражений (8) и (11) использовалось условие о равенстве перемещений для однородных тел в точке A [13]. В работах [16; 17] предложено новое решение для эффективного модуля упругости слоистого тела при нагружении его осесимметричной нагрузкой для любых значений толщины покрытия, описываемое более простым выражением, в котором:

$$F_1 = \frac{K_{01}(0)}{K_1(0)-K_1\left(\bar{\delta}_1\right)+K_0\left(\bar{\delta}\right)\cdot I_e}\,. \qquad (13)$$

Используем предложенный в [16; 17] подход для описания внедрения в слоистое полупространство сферического индентора.

Упрощенная модель слоистого тела при описании внедрения сферического индентора. Рассмотрим контакт жесткой сферы радиусом R со слоистым полупространством (рис. 2).

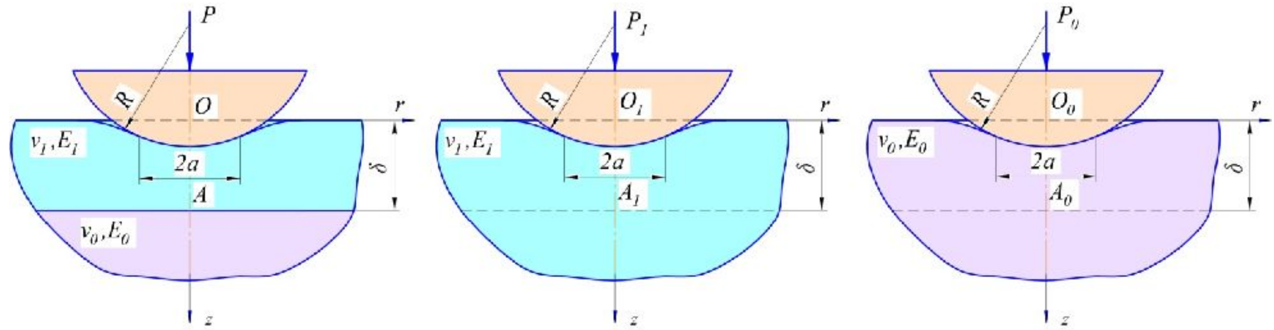


Рис. 2. Расчетная схема контактирования (*a*) и схемы контакта сферы с однородными полупространствами, имеющими характеристики ν_1, E_1 (*b*) и ν_0, E_0 (*c*)

Перемещение точки O (рис. 2*a*) может быть представлено в виде суммы перемещений покрытия и основания под нагрузкой P:

$$w_0 = w_\delta + w_A\,.$$

Схему (рис. 2*a*) можно представить в виде жесткостной модели (рис. 3*a*).

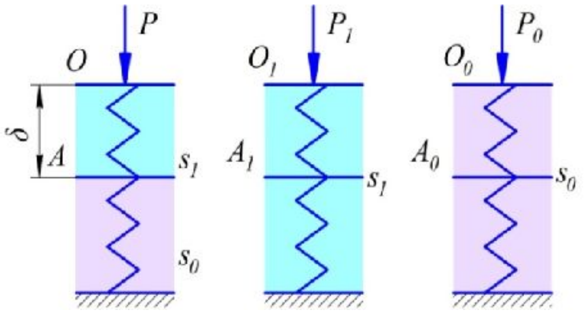


Рис. 3. Моделирование слоистого полупространства: *a* — исходная схема слоистого полупространства (рис. 2); *b*, *c* — жесткостные схемы однородных полупространств

Тогда перемещения:

$$w_0 = P\left(s_1 + s_0\right),$$

где s_1, s_0 — жесткости слоя и основного материала, $P = \pi a^2 p_m$.

Рассмотрим внедрения сфер радиусом R в два однородных полупространства с упругими характеристиками ν_1, E_1 и ν_0, E_0 под нагрузками P_1 и P_0 (рис. 2 *b* и *c*) Согласно данным [15], радиус площадки контакта сферы с однородным полупространством:

$$a = \left(\frac{3PR}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (14)$$

С учетом (4) и (14), сжатие однородного слоя толщиной δ (рис. 2*b*) определяем выражением:

$$w_1 = w_\delta = \frac{1.5P_1}{\pi}\left(\frac{4}{3E_1^{*2}P_1R}\right)^{\frac{1}{3}}\left[K_1(0)-K_1\left(\bar{\delta}\right)\right]. \qquad (15)$$

Соответствующая жесткость равна:

$$s_1 = \frac{w_1}{P_1} = \frac{1.5}{\pi}\left(\frac{4}{3E_1^{*2}P_1R}\right)^{\frac{1}{3}}\left[K_1(0)-K_1\left(\bar{\delta}\right)\right]. \qquad (16)$$

Перемещение точки A_0 и соответствующая жесткость s_0 равны:

$$w_{A_0} = w_A = \frac{1.5P_1}{\pi}\left(\frac{4}{3E_1^{*2}P_1R}\right)^{\frac{1}{3}} K_0\left(\bar\delta\right); \qquad (17)$$

$$s_0 = \frac{w_{a0}}{P_0} = \frac{1.5}{\pi}\left(\frac{4}{3E_1^{*2}P_1R}\right)^{\frac{1}{3}} K_0\left(\bar\delta\right). \qquad (18)$$

Значение P_1 определяем из условия равенства перемещений при $z = \delta$, слоистого упругого тела под нагрузкой P и однородного материала под нагрузкой P_1:

$$\frac{1.5}{\pi}\left(\frac{4P^2}{3E_1^{*2}R}\right)^{\frac{1}{3}}\left[K_{01}(0) - K_{01}\left(\bar\delta\right)\right] = \frac{1.5}{\pi}\left(\frac{4P_1^2}{3E_1^{*2}R}\right)^{\frac{1}{3}}\left[K_1(0) - K_1\left(\bar\delta\right)\right]; \qquad (19)$$

$$P_1 = \frac{E_1^*}{E_{01}^*}\left(\frac{K_{01}(0) - K_{01}\left(\bar\delta\right)}{K_1(0) - K_1\left(\bar\delta\right)}\right)^{\frac{3}{2}} P. \qquad (20)$$

Значение P_0 определим из условия равенства перемещений при $z = \delta$, слоистого упругого тела под нагрузкой P и однородного материала под нагрузкой P_0. В результате получим:

$$P_0 = \frac{E_0^*}{E_{01}^*}\left(\frac{K_{01}\left(\bar\delta\right)}{K_0\left(\bar\delta\right)}\right)^{\frac{3}{2}} P. \qquad (21)$$

Из равенства перемещений $w_1 = w_\delta$ и $w_{A_0} = w_A$ следует:

$$P = P_1\frac{s_1}{s_1 + s_0} + P_0\frac{s_0}{s_1 + s_0}, \qquad (22)$$

Подставляя выражения (16), (18), (20), (21) в (22), имеем:

$$E_{01}^* = E_1^* \cdot F_{1R}, \qquad (23)$$

$$F_{1R} = \frac{K_{01}(0)}{\dfrac{\left(K_1(0) - K_1\left(\bar\delta\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(K_{01}(0) - K_{01}\left(\bar\delta\right)\right)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\left(K_0\left(\bar\delta\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(K_{01}\left(\bar\delta\right)\right)^{\frac{1}{2}}} I_e}. \qquad (24)$$

В случае приближения значений $K_{01}\left(\bar\delta\right)$ к $K_i\left(\bar\delta\right)$ получим выражение (13).

Максимальные расхождения значений зависимостей $F_{1n}(\bar\delta)$ и $F_{1Rn}(\bar\delta)$ в диапазоне $\bar\delta$=0…10 при $I_e = 0.1$ не превышают 5 %, а средние расхождения не превышают 1 %.

Предполагая применимость теории Герца для слоистого упругого тела с приведенным модулем упругости $E_{01}^* = E_1^* \cdot F_{1R}$, определим относительные контактные характеристики при внедрении сферы — радиус площадки контакта $\bar a = a/R$, величину внедрения $\bar w_0 = w_0/R$, максимальное давление на площадке контакта $\bar p_0 = p_0 / E_1^*$ — в зависимости от безразмерной нагрузки $\bar P = P/\left(E_1^* R^2\right)$.

При упругом контакте относительный радиус контакта $\bar a$ определяется из следующего выражения [18]:

$$\bar P = \frac{P}{E_1^* R^2} = \left[0{,}5\left(1 + \bar a^2\right)\ln\frac{1+\bar a}{1-\bar a} - \bar a\right] F_{1R}. \qquad (25)$$

Относительная величина внедрения $\bar w_0$ описывается выражением:

$$\bar w_0 = w_0/R = \frac{1}{2}\cdot \bar a \cdot \ln\frac{1+\bar a}{1-\bar a}. \qquad (26)$$

Так как $p_0 = 3P/\left(2\pi a^2\right)$, с учетом (14) имеем:

$$\bar p_0 = \frac{p_0}{E_1^*} = \frac{1}{\pi}\left(6\bar P F_{1R}^2\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (27)$$

Для $a/R \le 0{,}4$ при определении параметров контакта удобно использовать выражения для параболоида вращения [9]:

$$\bar P = \frac{P}{E^* R^2} = \frac{4}{3}\bar a^3, \quad \bar w_0 = w_0/R = \bar a^2. \qquad (28)$$

Обсуждение полученных результатов. Точное решение пространственной осесимметричной задачи для описания напряженно-деформированного состояния в упругом слое при внедрении в него сферического индентора приведено в работе [2, с. 56–62], в которой использован метод интегрального преобразования Фурье – Бесселя. Результаты расчетов параметров контакта шарового индентора радиусом $R = 2.5\cdot10^{-3}$ м с полимерным слоем толщиной $\delta = 10^{-4}$ м, жестко скрепленным с основанием, приведены там же на с. 68, 69 (табл. 2.1). Модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов покрытия и основания соответственно равны: E_0 = 201 ГПа, $\nu_0 = 0{,}3$; E_1 = 2,39 ГПа, $\nu_1 = 0{,}38$. Ниже в таблице приведены некоторые данные точного решения из [2] для сравнения с результатами, полученными по предлагаемой инженерной методике.

Для заданных значений a (столбец 1) в [2] определены усилие внедрения P, максимальное давление на площадке контакта p_0 и величина внедрения w_0 (соответственно столбцы 2–4). Для обобщения результатов проведем сравнение безразмерных величин. Для безразмерной нагрузки $\bar P$ определены относительное внедрение $\bar w_0$ согласно [2] и по предлагаемой инженерной методике $\bar w_{0s}$ (соответственно столбцы 6 и 7). Максимальная погрешность по абсолютной величине не превысила 10 %, а средняя погрешность для приведенных значений относительного внедрения составила 4,7 %, что свидетельствует о приемлемости предлагаемой методики для инженерных расчетов параметров контакта шарового индентора со слоистым упругим телом.

Соответствующие графические зависимости относительного внедрения от безразмерной нагрузки, рассчитанные по разным методикам, представлены на рис. 4.

Таблица 1

Результаты расчетов сравнения величин относительного внедрения шарового индентора в упругий слой, жестко скрепленный с основанием, проведенных согласно [2] и по предлагаемой методике

$a\cdot10^4$, м	P, Н	p_0, МПа	$w_0\cdot10^4$, м	$\log\bar{P}$	$\bar{w}_0$	$\bar{w}_{0s}$	$\frac{\bar{w}_0-\bar{w}_{0s}}{\bar{w}_0}$, %
1	2	3	4	5	6	7	8
0.05	0.0002	3.69	0.0106	–7.941	$4.24\cdot10^{-6}$	$3.999\cdot10^{-6}$	5.67
0.1	0.0017	7.39	0.0413	–7.012	$1.652\cdot10^{-5}$	$1.6\cdot10^{-5}$	3.13
0.2	0.0135	14.8	0.1570	–6.112	$6.28\cdot10^{-5}$	$6.4\cdot10^{-5}$	–1.92
0.3	0.0464	23	0.322	–5.575	$1.288\cdot10^{-4}$	$1.21\cdot10^{-4}$	6.05
0.5	0.2250	40	0.804	–4.89	$3.216\cdot10^{-4}$	$3.24\cdot10^{-4}$	–0.76
0.8	1.04	73	1.842	–4.225	$7.368\cdot10^{-4}$	$7.842\cdot10^{-4}$	–6.43
1	2.23	102	2.738	–3.894	$1.095\cdot10^{-3}$	$1.156\cdot10^{-3}$	–5.56
2	28.3	359	9.781	–2.79	$3.912\cdot10^{-3}$	$4.225\cdot10^{-3}$	–7.98
3	126	804	21.45	–2.142	$8.58\cdot10^{-3}$	$8.464\cdot10^{-3}$	1.35
4	427	1 440	38.17	–1.612	0.015	0.016	–5.64
5	1 046	2 267	60.33	–1.222	0.024	0.025	–4.76
8	6 962	5 824	163.1	–0.399	0.065	0.062	4.2
10	16 952	8 990	260.4	–0.013	0.104	0.1	4.13
15	82 556	19 155	616.3	0.675	0.247	0.235	4.56
20	247 400	31 973	1 137	1.151	0.455	0.416	8.51

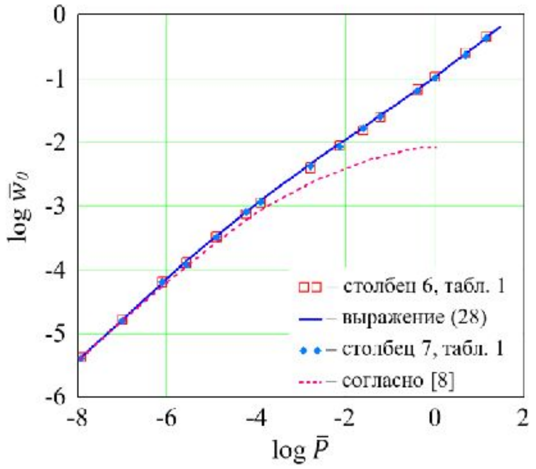


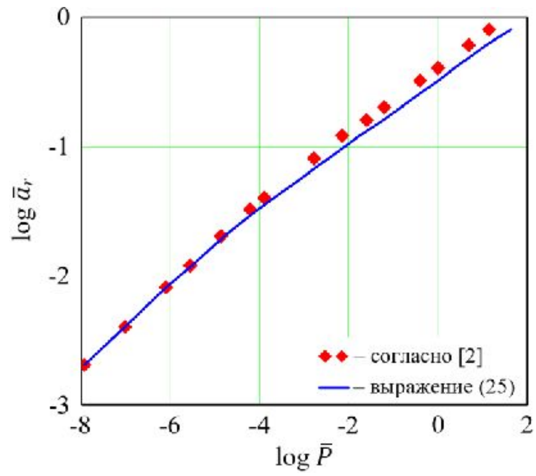
Рис. 4. Зависимость относительного внедрения $\bar{w}_0$ от безразмерной нагрузки $\bar{P}$

Точками обозначены зависимости по данным, приведенным в таблице. Сплошная линия соответствует данным, рассчитанным по выражению (28) для значений a, приведенных в столбце 1 таблицы 1. Штриховая линия соответствует приближенному решению осесимметричной контактной задачи для упругого слоя конечной толщины [8]. Как следует из рис. 4 и таблицы 1, приближенное решение приемлемо только для $a \le \delta$.

На рис. 5 представлены зависимости относительного радиуса площадки контакта $\bar{a}_r$ и относительного максимального контактного давления $\bar{p}_0$ от безразмерной нагрузки $\bar{P}$, полученные по выражениям (25)–(28) в предположении применимости теории Герца.

Как следует из рис. 4 и 5, наилучшее совпадение результатов по предлагаемой методике с точным решением [2] имеет место при определении внедрения индентора (рис. 4). Это вполне объяснимо, так как в основу жесткостной модели слоистого тела положена зависимость перемещений по оси симметрии от приложенного усилия.

a)



b)

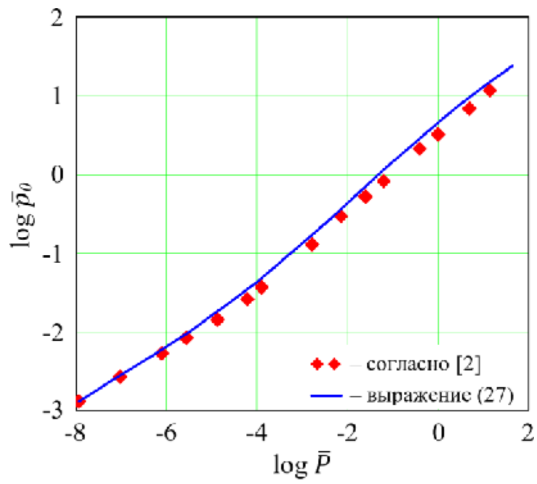


Рис. 5. Зависимости относительного радиуса площадки контакта $\bar{a}_r$ и относительного максимального контактного давления $\bar{p}_0$ от безразмерной нагрузки

Систематическая погрешность при определении радиуса площадки контакта и максимального контактного давления связана с отличием распределения контактного давления от «герцевского».

В работе [2] для распределения контактного давления при внедрении сферы в полимерный слой предложено выражение:

$$p(r) = p_0\left(1 + r^2/a^2\right)^{\omega}, \qquad (29)$$

где $\omega > 0.5$.

Автор [3] также указывает на отличие распределения давления от «герцевского» при внедрении сферического индентора в упругое «мягкое» или «твердое» покрытие.

Учет отличия распределения контактного давления в рамках жесткостной модели слоистого тела требует дополнительных исследований.

Заключение

1. С использованием упрощенной модели слоистого тела разработана инженерная методика определения параметров контакта при внедрении в него сферического индентора.

2. Произведено сравнение полученных результатов с данными точного решения аналогичной задачи [2], которое представляет определенные трудности для его практического применения в инженерных расчетах, связанные с их сложностью и трудоемкостью. Совпадение приведенных графических зависимостей параметров контакта от безразмерного усилия, которое изменяется в пределах десяти порядков, с результатами точных решений [2] позволяет рекомендовать предлагаемую инженерную методику к практическому использованию.

3. Наилучшее совпадение результатов по предлагаемой методике с точным решением [2] имеет место при определении величины внедрения сферического индентора (рис. 4). Максимальная погрешность при этом не превысила 10 %, а средняя погрешность для приведенных значений относительного внедрения составила 4,7 %. Приближенное решение по внедрению сферы в упругий слой конечной толщины [8] приемлемо только для $a \le \delta$.

4. Систематическая погрешность при определении радиуса площадки контакта и максимального контактного давления связана с отличием распределения контактного давления от «герцевского». Учет этого фактора в рамках жесткостной модели слоистого тела требует дополнительных исследований.

Литература

1. Ковалев Е.П., Игнатьев М.Б., Семенов А.П., Смирнов Н.И., Неволин В.Н., Фоминский В.Ю. Твердосмазочные покрытия для машин и механизмов, работающих в экстремальных условиях // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 3. С. 316-336.

2. Макушкин А.П. Полимеры в узлах трения и уплотнениях при низких температурах М.: Машиностроение, 1993. 288 с.

3. Торская Е.В. Моделирование фрикционного взаимодействия тел с покрытиями: дис. … д-ра техн. наук. М., 2014. 251 с.

4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с упругими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

5. Giannakopoulos A.T., Suresh T. Indentation of solids with gradients in elastic properties. Part I Point force // Int J Solids Struct. 1997, № 34 (19). P. 2357-2392.

6. Айзикович С.М., Александров В.М., Васильев А.С., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. М.: Физматлит, 2011.

7. Потележко В.П. Задача Буссинеску для двухслойного полупространства // Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых тел и деталей машин. 2006. № 2. С. 27-32.

8. Аргатов И.И. Приближенное решение осесимметричной контактной задачи для упругого слоя конечной толщины // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 6. С. 35-40.

9. Воронин Н.А. Применение теории упругого контакта Герца к расчету напряженно-деформированного состояния слоистого упругого тела // Трение и износ. 1993. Т. 14, № 2. С. 250-258.

10. Воронин Н.А. Расчет параметров упругого контакта и эффективных характеристик топокомпозита для случая взаимодействия последнего со сферическим индентором // Трение и износ. 2002. Т. 23, № 6. С. 583-596.

11. Огар П.М., Тарасов В.А., Федоров И.Б. Управление жесткостью контактных систем уплотнительных соединений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 1. С. 22-27.

12. Ogar P.M., Tarasov V.A. Determination of the Elastic Characteristics of Bodies with Thin Coatings // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 2, № 677. P. 267-272.

13. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Эффективный модуль упругости слоистого тела // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 4 (52). С. 37-42.

14. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.

15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

16. Кожевников А.С. Новое инженерное решение для определение эффективного модуля упругости слоистого тела // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2016. № 2. С. 70-76.

17. Кожевников А.С. Упрощенная модель слоистого тела // Механики XXI веку. 2017. № 16. С. 211-217.

18. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.

References

1. Kovalev E.P., Ignat'ev M.B., Semenov A.P., Smirnov N.I., Nevolin V.N., Fominskij V.YU.Solid lubricating coatings for machines and mechanisms operaitng in extreme conditions summary // Friction and Wear. 2004. T. 25, № 3. P. 316-336.

2. Makushkin A.P.Polymers in friction and seal assemblies at low temperatures. M.: Mashinostroenie, 1993. 288p.

3. Torskaya E.V.Modeling of frictional interaction of bodies with coatings: dis. … d-ra tekhn. nauk. M., 2014. 251p.

4. Aleksandrov V.M., Mhitaryan S.M.Contact problems for bodies with elastic coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 488p.

5. Giannakopoulos A.T., Suresh T. Indentation of solids with gradients in elastic properties. Part I. Point force // Int J Solids Struct. 1997, № 34 (19). P. 2357-2392.

6. Ajzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Vasil'ev A.S., Krenev L.I., Trubchik I.S.Analytical solutions of mixed axisymmetric problems for functional gradient media. M.: Fizmatlit, 2011.

7. Potelezhko V.P.The Bousinescu problem for a two-layer half-space // Mekhanika i fizika processov na poverhnosti i v kontakte tverdyh tel i detalej mashin. 2006. № 2. P. 27-32.

8. Argatov I.I.Approximate solution of an axisymmetric contact problem for an elastic layer of finite thickness //Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2004. № 6. P. 35-40.

9. Voronin N.A.Application of the theory of the elastic Hertz contact to the calculation of the stress-strain state of a layered elastic body //Friction and Wear. 1993. T. 14, № 2. P. 250-258.

10. Voronin N.A.Calculation of elastic contact parameters and effective characteristics of the topocomposite for the case of interaction of the latter with a spherical indenter //Friction and Wear. 2002. T. 23, № 6. P. 583-596.

11. Ogar P.M., Tarasov V.A., Fedorov I.B.Stiffness control of contact systems of sealing joints//Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 1. P. 22-27.

12. Ogar P.M., Tarasov V.A. Determination of the Elastic Characteristics of Bodies with Thin Coatings // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 2, № 677. P. 267-272.

13. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S. The effective modulus of elasticity of a layered body//Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 4 (52). P. 37-42.

14. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetology of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242p.

15. Dzhonson K. Contact mechanics. M.: Mir, 1989. 510p.

16. Kozhevnikov A.S. New engineering solution for determining the effective modulus of elasticity of a layered body // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2016. № 2. P. 70-76.

17. Kozhevnikov A.S.Simplified model of a layered body // Mekhaniki XXI veku. 2017. № 16. P. 211-217.

18. Argatov I.I., Dmitriev N.N.Fundamentals of the theory of elastic discrete contact. SPb.: Politekhnika, 2003. 233p.