УДК 531.01: 531.8: 531.37: 531.46: 534.013: 539.3: 622.23.01: 622.24.053: 629.3: 629.4: 666.97.033
DOI: 10.18324/2077-5415-2018-3-24-32

Общий подход к определению сил сопротивления при качении, скольжении тел с верчением, бурении, проникании, сверлении и заглаживании

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Статья поступила 27.06.2018 , принята 8.07.2018

Предложен единый подход к задачам контактного взаимодействия для тел с комбинированной кинематикой в определении динамических сил сопротивления. В задачах качения с возможностью проскальзывания и верчения, скольжения с верчением, бурения, проникания для тел вращения, сверления и заглаживания пластической среды динамика процессов учитывается не через контактные напряжения, как это принято делать, а через кинематические скорости — скольжения или погружения (проникания), качения и верчения. Предлагается простой качественный способ нахождения аналитических зависимостей от кинематических скоростей для силовых компонент — силы трения скольжения или лобового сопротивления (при погружении и проникании), моментов трения качения и верчения. Для этого установлена связь между кинематическими скоростями и изменением размеров кинематических зон — скольжения или погружения (проникания), схватывания (сцепления) и верчения, определяющих динамику процессов в пятне контакта. Для построения единой теории введена гипотеза о существовании таких кинематических зон в поверхностном слое контактирующего тела на мезомасштабном уровне с возможностью их концентраций и перехода на макроуровень. Указана причина нечувствительности теории поликомпонентного сухого трения к изменениям угловой скорости качения, приводящая к неточностям этой теории, а для случая скольжения тела с верчением дано качественное обоснование формул В.Ф. Журавлева. Обоснованы также формулы для сил сопротивления со стороны забоя скважины, которые вводились ранее автором, исходя из промысловых данных, при построении строгой теории бурения. Исправлены замеченные неточности в обоснованиях качественной теории качения, а для коэффициента трения качения принята квадратичная зависимость от скорости движения колеса.

Ключевые слова: качение; колесо; коэффициент трения качения; скольжение тел с верчением; бурение; проникание; сверление; заглаживание; контактное взаимодействие; поликомпонентное сухое трение; мезомеханика.

A general approach to determining the drag forces during rolling, sliding of bodies with spinning, penetration, drilling and smoothing

V. A. Koronatov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Received 27.06.2018 , accepted 8.07.2018

A unified approach to the problems of contact interaction for bodies with combined kinematics in determining the dynamic forces of resistance is proposed. In problems of rolling with the possibility of slipping and spinning, sliding with spinning, drilling, penetration of the bodies of rotation, drilling or smoothing plastic medium dynamics of the processes is taken into account via the contact voltage, as is commonly done, and using the kinematic velocity – slipping or dipping (penetration), rolling and spinning. A simple qualitative method for the analytical dependence on the kinematic velocities for the force components – the sliding friction force or drag (during immersion and penetration), the rolling and twisting friction moments is proposed. For this purpose, the relationship between the kinematic velocities and the size of the kinematic zones-slipping or immersion (penetration), setting (adhesion) and twisting, determining the dynamics of the processes in the contact spot is established. To build a unified theory, the hypothesis of the existence of such kinematic zones in the surface layer of the contacting body at the mesoscale level with the possibility of their concentration and transition to the macro level is introduced. The reason of insensitivity of the theory of polycomponent dry friction to changes in the angular rolling speed is indicated, which leads to inaccuracies in this theory, and for the case of sliding of a body with twisting, a qualitative justification of the formulas of V.F. Zhuravlev is given. The formulas for the resistance forces from the side of the well, which were introduced earlier by the author based on the field data in the construction of a strict drilling theory, are also substantiated. The noted inaccuracies in the justifications of the qualitative rolling theory are corrected, and for the coefficient of rolling friction, the quadratic dependence on the wheel speed is assumed.

Key words: rolling; wheel; rolling friction coefficient; sliding of bodies with spinning; drilling; penetration; smoothing; contact interaction; polycomponent dry friction; mesomechanics.

Введение

В данной статье речь пойдет о, казалось бы, совершенно разных задачах: с одной стороны, это задачи качения и скольжения тел с верчением вдоль негладкой поверхности, а с другой — бурения и проникания в сопротивляющейся среде. Объединяет их только то, что в них рассматриваются тела с комбинированной кинематикой движения, когда рассматриваемые тела участвуют одновременно в нескольких простых движениях. И, как следствие, выявляется сложный характер динамических сил сопротивления, для которых отсутствуют общие методы установления аналитических законов изменения от скоростей простых движений — составляющих комбинированной кинематики. Определение сил сопротивления для тел с комбинированной кинематикой всегда представляет большую сложность и становится причиной неоднозначности в решении этого вопроса. Эти задачи можно отнести к динамическим задачам контактного взаимодействия, которые принято считать труднорешаемыми [1].

Из-за сложностей с вводом сил сопротивления некоторые из перечисленных задач решались лишь на полуэмпирическом уровне или даже не позволяли находить искомого решения. Так, например, в задачах бурения [2–6] существующие методы не давали возможности моделировать процесс погружения бурильной колонны во время углубления забоя — самого главного и определяющего в нахождении динамических законов бурения. В задачах качения [7–9] возникали сложности в определении силы трения скольжения и моментов трения качения и верчения из-за громоздких интегральных выражений для них. В задачах проникания [10–14] тел вращения для силы лобового сопротивления вводятся эмпирические зависимости, где никак не учитывается влияние угловой скорости. Как показывают промысловые данные при бурении, угловая скорость вращения вносит существенную поправку для величины этой силы в сторону ее уменьшения [4–6].

Следует иметь в виду, что в существующих теориях для таких задач общепринято определять силы сопротивления через контактные напряжения с привлечением методов теории упругости [1; 15]. Такой подход и предопределяет получение сложных интегральных выражений для результирующих сил сопротивления — громоздких и не всегда поддающихся точному интегрированию [1; 8; 15]. Такие выражения затрудняют нахождение для сил сопротивления аналитических зависимостей от кинематических скоростей, которые необходимы при решении динамических задач. Кроме того, здесь возникает необходимость в определении динамического закона распределения контактных напряжений, который из-за сложностей его определения принято заменять стационарным законом Герца [16]. Попытка упростить нахождение сил сопротивления для случаев качения и скольжения тел с верчением была предпринята в теории поликомпонентного сухого трения [17–21], где интегральные выражения для них заменялись аппроксимацией Паде. Но, как будет показано ниже, эта теория оказалась нечувствительной к изменениям угловой скорости качения, а для случая скольжения тела с верчением приведенные формулы нуждаются в строгом или качественном обосновании. Из записанных общих интегральных выражений для сил сопротивления, определяемых через напряжения, никак не следуют формулы В.Ф. Журавлева [17–21]. Эти формулы, скорее всего, получены полуэмпирически, пусть даже и на основе численного анализа свойств исходных интегральных выражений.

Автором данной статьи ранее были предложены решения сначала для задач бурения [22–24] и заглаживания [25–27], а затем — качения [28–30]. В задачах бурения соответствующие силы сопротивления вводились полуэмпирически, на основании промысловых данных об их зависимости от кинематических скоростей, с использованием аппроксимации Паде, без строгих обоснований. Тем не менее, введение новых аналитических зависимостей для сил сопротивления позволило решить вопрос о моделировании процесса погружения бурильной колонны при углублении забоя и возможность построения основ строгой теории бурения [22–24]. Существенно, что при моделировании процесса бурения стало возможным учитывать возможность кратковременных остановок (заклиниваний) вращательного и поступательного движений породоразрушающего инструмента, в зависимости от прочностных свойств породы в забое. Аналогичный подход в последующем использовался и для создания теории проектирования вибрационных заглаживающих машин [25–27] высокой производительности по выравниванию поверхности пластической среды (бетонной смеси). Для задач качения, как это ни странно, соответствующих экспериментальных данных в нахождении аналитических выражений для сил сопротивления оказалось недостаточно, и поэтому предыдущий подход здесь не помог. Это побудило по-новому взглянуть на процесс качения — через динамику изменений пятна контакта. Основанием послужили экспериментальные данные, полученных О. Рейнольдсом в 1876 г. [31], об изменении пятна контакта при качении цилиндра без верчения. В результате была создана новая качественная теория качения [28–30], где силы сопротивления определяются не через контактные напряжения, как это делается в существующих теориях, а через кинематические скорости. Для этого была установлена связь между скоростями и изменением размеров кинематических зон, определяющих динамику процесса в пятне контакта. Для установления такой связи, как и в задачах бурения, была использована аппроксимация Паде. Это позволило избегать необходимости конкретного определения самих размеров пятна контакта и кинематических зон — далеко не простых задач. Применение аппроксимации Паде дает возможность для кинематической зоны определять, какую часть от всей площади пятна контакта она занимает в текущий момент времени. Этого оказалось вполне достаточно для установления искомой связи между скоростями и изменением размеров кинематических зон.

Существенным является то, что в созданной теории качения [28–30] были впервые качественно обоснованы аналитические выражения для сил сопротивления. Кроме того, полученные аналитические зависимости для сил сопротивления оказались близки по виду к соответствующим зависимостям других упомянутых выше задач. Возникало естественное предположение о том, что и в других контактных задачах, аналогично качению, в пятне контакта возникают соответствующие кинематические зоны, а силы сопротивления в пятне контакта определяются через динамику изменений размеров этих зон. Только, в отличие от задач качения без верчения, экспериментальные данные, подтверждающие существование таких зон, в настоящее время отсутствуют. Проведение экспериментов для их обнаружения предполагает высокий профессиональный уровень, наличие современной и дорогостоящей аппаратуры.

Для обоснования таких предположений традиционного феноменологического подхода на макромасштабном уровне, что предполагается в классической механике, здесь явно недостаточно. Для этого необходимы новые подходы и принципы. Такую возможность дает молодая, бурно развивающаяся наука — физическая мезомеханика, в которой сформулирована концепция структурных уровней деформации твердых тел как новая парадигма на стыке физики и механики деформируемого твердого тела. Физическая мезомеханика [32–34] описывает нагруженное твердое тело как иерархическую систему, в которой процессы деформации и разрушения развиваются самоорганизованно на микро-, мезо- и макромасштабных уровнях. Усредненное движение конечного числа мезообъемов позволяет получить макроописание деформируемого твердого тела. В задачах контактного взаимодействия наиболее важную роль будет играть поверхностный слой [35], толщина которого 5–200 мкм, где в первую очередь зарождаются локальные несплошности и микротрещины вследствие деградации поверхности при трении.

Излагаемый ниже общий подход к контактным задачам для тел с комбинированной кинематикой строится на основе ранее полученных результатов новой качественной теории качения [28–30], основ строгой теории бурения [22–24] и теории заглаживания пластической среды [25–27], ранее созданных автором. А также физической мезомеханики и экспериментальных данных, полученных в рамках этой теории. Качественная теория качения при этом уточняется, и исправляются замеченные автором ошибки в ее обосновании. Для коэффициента трения качения принята квадратичная зависимость от скорости движения колеса — более общая в сравнении с тем, что предлагает закон Амонтона – Кулона.

Некоторые определения

• Комбинированная кинематика — это такое движение, когда тело одновременно участвует в нескольких простых движениях: вращательном, с возможностью качения и верчения по отдельности или одновременно, и поступательном.

Под контактным взаимодействием тел с комбинированной кинематикой в статье подразумеваются такие задачи:

• качения — качение колеса или шара вдоль шероховатой плоскости с возможностью проскальзывания и верчения вокруг вертикального диаметра к опорной плоскости;

• скольжения с верчением — движение тела вдоль шероховатой плоскости с одновременным участием в скольжении и верчении;

• упрощенный вариант бурения — погружение вращающегося породоразрушающего инструмента (долота) при углублении забоя скважины, без детализации динамики перекатывания шарошек в забое;

• проникания — движение тела вращения в сопротивляющейся среде с возможностью погружения и верчения;

• сверления — движение вращающегося сверла в сопротивляющейся среде с возможностью погружения и верчения;

• упрощенный вариант заглаживания — движение дискового рабочего органа в пластической среде, без учета движения вдоль ее поверхности, с одновременным участием в погружении и верчении (длительное заглаживание на одном месте).

Последние четыре из перечисленных задач в оговоренных вариантах, несмотря на различие их назначений, описываются практически одинаково. Поэтому эти задачи для краткости в дальнейшем будут называться задачами бурения. Также для краткости в дальнейшем для вышеперечисленных задач будем пользоваться термином «силовые компоненты», который определяет:

• силу трения скольжения и моменты трения качения и верчения — для задач качения;

• силу трения скольжения и момент трения верчения — для задач скольжения с верчением;

• силу лобового сопротивления и момент сопротивления вращению (верчению) — для задач бурения;

В рассматриваемых задачах силовые компоненты зависят от следующих кинематических скоростей:

• линейной скорости проскальзывания и угловых скоростей качения и верчения — для задач качения;

• линейной скорости скольжения и угловой скорости верчения — для задач скольжения с верчением;

• линейной скорости погружения и угловой скорости вращения (верчения) — для задач бурения.

Введем строгие определения кинематических зон, возникающих в пятне контакта:

• зона скольжения — область пятна контакта, где точки соприкосновения одного контактирующего тела имеют одинаковые скорости скольжения относительно другого контактирующего тела (например, опорной поверхности);

• зона верчения — область пятна контакта, где точки соприкосновения одного контактирующего тела имеют разные скорости скольжения относительно другого контактирующего тела;

• зона схватывания (сцепления) — область пятна контакта, где точки соприкосновения контактирующих тел неподвижны относительно друг друга;

• зона погружения (проникания) — область пятна контакта, где точки соприкосновения одного контактирующего тела имеют одинаковые скорости погружения (проникания) относительно поверхности другого контактирующего тела (обычно неподвижного тела, например, забоя скважины или поверхности пластической среды).

В рассматриваемых задачах пятно контакта может включать в себя следующие кинематические зоны:

• сцепления, скольжения и верчения — для задач качения;

• скольжения и верчения — для задач скольжения с верчением;

• погружения и верчения – для задач бурения.

Основания и гипотезы новой теории. Исходя из положений мезомеханики [32–34], будем полагать, что для поверхностного слоя справедливо следующее. При любом движении трущихся тел в пятне их контакта могут возникать на мезомасштабном уровне все виды кинематических зон, перечисленные выше. Это происходит вследствие шероховатости трущихся тел на мезоуровне в виде выступов, которые располагаются хаотично, под разными углами по отношению друг к другу, и обладают упругостью, наличием углублений и трещин. При этом все такие кинематические мезозоны обладают малым временем жизни, располагаются хаотично и без каких либо концентраций, если они отвечают за не доминирующие движения, которые определяются скоростями на мезомасштабном уровне. Для кинематических мезозон доминирующих движений, которые проявляются скоростями уже макромасштабного уровня, будет наблюдаться рост их числа, времени жизни и размеров с возможностью их концентраций и упорядоченности. Последнее может приводить к объединению близлежащих таких зон в отдельные области, которые могут разрастаться и таким образом переходить из мезомасштабного уровня в макромасштабный. На макромасштабном уровне появляется возможность их заметить, что удалось, например, О. Рейнольдсу [31] в своих экспериментах с качением цилиндра, где доминирующими движениями были качение и скольжение. Следует ожидать и обратную картину. Если какое-либо из доминирующих движений утрачивает свое значение за счет уменьшения соответствующей скорости, то и области, объединяющие кинематические мезозоны этих движений, начинают уменьшаться и распадаться на отдельные мезозоны. В этом случае будет происходить обратный переход — от макромасштабного уровня к мезомасштабному, с потерей их видимости. Количество таких мезозон, их упорядоченность и концентрация, время жизни тоже будут сокращаться. В опытах О. Рейнольдса подобное проявлялось в виде потери зоны скольжения или схватывания в пятне контакта при уменьшении или увеличении движущего момента, что приводило к исчезновению скорости проскальзывания (возникало чистое качение) или угловой скорости качения (возникало чистое скольжение). То же самое наблюдалось и при увеличении или уменьшении тормозного момента.

Других экспериментальных данных, напрямую подтверждающих наличие соответствующих кинематических зон, к сожалению, нет. Возможно, из-за того, что никто не ставил цель обнаружить их ввиду отсутствия подобной теории.

Существующие экспериментальные исследования на мезомасштабном уровне [32–34] в основном посвящены решению вопросов прочности металлов, возникновения пластических деформаций и трещин, изношенности материала при трибоконтакте [35; 36]. Трение тел с комбинированной кинематикой на мезомасштабном уровне никто не изучал. В поверхностном слое лишь при возникновении пластических деформаций определялись распределение скоростей [35; 36]. Последнее можно рассматривать как косвенное подтверждение существования кинематических зон — направление пластических деформаций следует ожидать в направлении скорости относительного движения соприкасающихся тел.

Для нахождения аналитических зависимостей для силовых компонент от кинематических скоростей примем следующие предположения-гипотезы:

1. Пятно контакта может либо состоять только из одной кинематической зоны, либо включать в себя несколько кинематических зон, отвечающих за простые движения — составляющие комбинированной кинематики движения рассматриваемой контактной задачи.

2. В задачах качения и бурения (проникания) пятно контакта формируется, изменяя свою форму, размеры и площадь, во время одного из простых движений тела, которое предшествует началу комбинированной кинематики движения (в задачах скольжения тел с верчением пятно контакта изначально сформировано и всегда соответствует площади соприкасающихся тел).

3. Сформировавшееся пятно контакта во время комбинированной кинематики движения может изменять свою форму и размеры в результате соответствующих изменений отдельных кинематических зон или рождения новых и исчезновения старых, сохраняя при этом свою площадь (изменение отдельных кинематических зон может происходить только за счет изменений других зон пятна контакта в каждый момент времени).

4. Рост отдельной кинематической зоны или пятна контакта во время его формирования по размерам и площади может происходить при увеличении и в направлении соответствующей кинематической скорости, отвечающей за данное простое движение; справедливо и обратное.

5. Законы Амонтона – Кулона справедливы для кинематических зон мезомасштабного или макромасштабного уровня, отвечающих за простые движения.

Следует заметить, что ранее, в первоначальной версии качественной теории качения [28–30], ошибочно предполагалось, что зона скольжения может состоять одновременно из двух совпадающих по размерам и положению зон скольжения и верчения. На основании приведенных выше определений для кинематических зон, такое предположение было ошибочным — эти кинематические зоны не могут совпадать или иметь общие области. Сделанное уточнение упрощает обоснование полученных ранее формул для силовых компонент сопротивления для качения с верчением, при этом ранее приведенные формулы остаются в силе.

Отметим также, что согласно введенной гипотезе 4 гипотеза об увеличении длины зоны сцепления в пятне контакта по мере роста модуля угловой скорости, принятая в первоначальной теории качения, распространяется и на случаи чистого качения колеса, когда проскальзывание отсутствует — ранее такая гипотеза вводилась только для случая качения с проскальзыванием.

Полученные результаты. Созданная теория дает общий подход в нахождении аналитических зависимостей для силовых компонент от кинематических скоростей в задачах контактного взаимодействия (для тел с комбинированной кинематикой движения) и качественное обоснование для них. Приведенные ниже формулы для силовых компонент показывают, от каких кинематических скоростей эти компоненты зависят прямо пропорционально, а от каких — обратно. Приведено качественное обоснование этого.

1. В задачах качения [28–30]**.**

$$F = F_0 \frac{|\upsilon| + \Delta}{|\upsilon| + \kappa\varepsilon|\dot{\gamma}| + bR|\dot{\beta}| + \Delta}, \quad F_0 = F\Big|_{\dot{\beta}\equiv\dot{\gamma}\equiv 0} = fN; \qquad (1)$$

$$M = M_0 \frac{R|\dot{\beta}| + \Delta}{R|\dot{\beta}| + \kappa\varepsilon|\dot{\gamma}| + a|\upsilon| + \Delta}, M_0 = M\Big|_{\dot{\gamma}\equiv\upsilon\equiv 0} = \rho N; \qquad (2)$$

$$M_z = M_{z0} \frac{\varepsilon|\dot{\gamma}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\gamma}| + \hat{a}|\upsilon| + \hat{b}R|\dot{\beta}| + \Delta}, \quad M_{z0} = M_z\Big|_{\upsilon\equiv\dot{\beta}\equiv 0} = \tilde{\rho}N. \qquad (3)$$

Здесь F, M, M_z – соответственно сила трения скольжения, моменты трения качения и верчения; точка здесь и далее означает дифференцирование по времени t; R, N – соответственно радиус колеса и сила давления; $\upsilon, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ – кинематические скорости: скольжения, качения, верчения (рис. 1 и 2); $a, b, \kappa, \Delta, \hat{a}, \hat{b}$ – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально; ε – средний радиус пятна контакта; $f, \rho, \tilde{\rho}$ – коэффициенты трения, соответственно, скольжения, качения и верчения, определяемые согласно закону Амонтона – Кулона, справедливость которого предполагается для скольжения, верчения и качения, когда они присутствуют порознь:

$$f = f_0 sign\,\upsilon, \text{при } \upsilon \neq 0; [-f_1, f_1], \text{при } \upsilon \equiv 0, \text{если } \dot{\gamma} \equiv \dot{\beta} \equiv 0;$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 sign\,\dot{\gamma}, \text{при } \dot{\gamma} \neq 0; [-\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1], \text{при } \dot{\gamma} \equiv 0, \text{если } \upsilon \equiv \dot{\beta} \equiv 0;$$

$$\rho = \rho_0 sign\,\dot{\beta}, \text{при } \dot{\beta} \neq 0; [-\rho_1, \rho_1], \text{при } \dot{\beta} \equiv 0, \text{если } \upsilon \equiv \dot{\gamma} \equiv 0; \qquad (4)$$

Предполагается: $\mu = f_1 / f_0 > 1;$ $\hat{\mu} = \rho_1 / \rho_0 > 1;$ $\tilde{\mu} = \tilde{\rho}_1 / \tilde{\rho}_0 > 1;$, т. е. считается, что трение скольжения – качения – верчения покоя не равно трению скольжения – качения – верчения движения. Закон Амонтона – Кулона для качения (4) в дальнейшем будет уточнен. Заметим, что ранее в формулах (1), (2) вместо выражения $R|\dot{\beta}|$ использовалось выражение $\varepsilon|\dot{\beta}|$, что не принципиально, но, по мнению автора, было менее правильным; кинематические скорости берутся по модулю, если эти скорости могут менять свой знак.

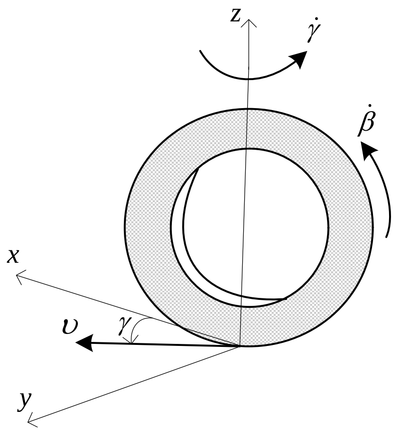

Рис. 1. Колесо при качении с проскальзыванием и верчением

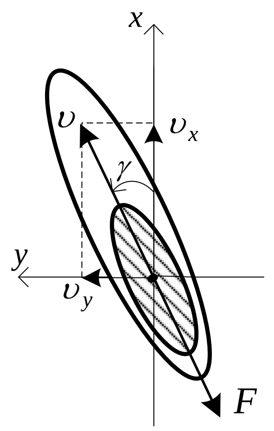

Рис. 2. Пятно контакта колеса

1. Формула (1) определяет, какая часть от F_0 — силы трения при чистом скольжении — приходится в данный момент времени на силу трения скольжения. Здесь следует иметь в виду, что увеличение $|\upsilon|$, согласно гипотезе 4, приводит к росту площади зоны скольжения, а значит, и росту силы давления, приходящейся на данную зону, и тем самым, согласно закону Амонтона – Кулона, к росту силы трения скольжения. Рост угловых скоростей качения и верчения по модулю, опять же согласно гипотезе 4, ведет к росту зон сцепления и верчения, что может происходить только за счет уменьшения зоны скольжения, а значит — к уменьшению силы трения скольжения. Максимальное по модулю значение силы трения скольжения достигается, когда пятно контакта полностью занято зоной скольжения, т. е. при $\dot{\beta} \equiv \dot{\gamma} \equiv 0$.

2. Формула (2) определяет, какая часть от M_0 — момента трения при чистом качении — приходится в данный момент времени на момент трения качения. Здесь следует иметь в виду, что увеличение $|\dot{\beta}|$, согласно гипотезе 4, приводит к росту площади зоны сцепления, а значит, и росту силы давления, приходящейся на

данную зону, и тем самым, согласно закону Амонтона – Кулона, к росту момента трения качения. Здесь также следует принять во внимание и то, что зона сцепления вытягивается в сторону качения — возрастает и плечо пары, создающей момент трения качения. Рост скорости скольжения и угловой скорости верчения по модулю, опять-таки согласно гипотезе 4, ведет к росту зон скольжения и верчения, что может происходить только за счет уменьшения зоны сцепления, а значит, — к уменьшению момента трения качения. Максимальное по модулю значение момента трения качения достигается, когда пятно контакта полностью занято зоной сцепления, т. е. при $\upsilon \equiv \dot{\gamma} \equiv 0$.

3. Формула (3) определяет, какая часть от M_{z0} — момента трения при чистом верчении — приходится в данный момент времени на момент трения верчения. Здесь следует иметь в виду, что увеличение $|\dot{\gamma}|$, согласно гипотезе 4, приводит к росту площади зоны верчения, а значит, и росту силы давления, приходящейся на данную зону, и тем самым, согласно закону Амонтона – Кулона, к росту момента трения верчения. Рост скорости скольжения и угловой скорости качения по модулю, опять согласно гипотезе 4, ведет к росту зон скольжения и сцепления, что может происходить только за счет уменьшения зоны верчения, а значит, — к уменьшению момента трения верчения. Максимальное значение по модулю момента трения верчения достигается, когда пятно контакта полностью занято зоной верчения, т. е. при $\dot{\beta} \equiv \upsilon \equiv 0$.

В законе Амонтона – Кулона для качения коэффициент трения качения ρ, согласно (4), принято считать постоянной величиной, не зависящей от скорости движения колеса. Однако, согласно излагаемой здесь теории и введенной аксиоме (4), при росте скорости движения колеса будут вытягиваться пятно контакта и зона сцепления в направлении качения. Это должно привести к возрастанию момента трения качения за счет увеличения плеча пары, образующей этот момент. Тем самым, коэффициент трения качения должен быть прямо пропорционален скорости движения центра колеса $\dot{x}$, которая связана с угловой скоростью и скоростью проскальзывания соотношением: $\dot{x}=\upsilon+R\dot{\beta}$. Введем полуэмпирическую зависимость для коэффициента трения качения: $\rho = \rho_0\left(1+\mathrm{h}\dot{x}^2\right) sign\,\dot{\beta}$ во время движения колеса. Здесь учтены опытные данные, говорящие о том, что коэффициент трения качения почти не изменяется при малых скоростях движения колеса и начинает быстро нарастать после превышения некоторой скорости. Таким образом, уточненная характеристика изменения коэффициента трения качения принимается такой:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0\left[1+\mathrm{h}\left(\upsilon+\mathrm{R}\dot{\beta}\right)^2\right] sign\,\dot{\beta},\ npu\ \dot{\beta}\neq 0; \\ \left[-\rho_1,\rho_1\right], npu\ \dot{\beta}\equiv 0 \quad \left(\tilde{\mu}=\dfrac{\rho_1}{\rho_0}>1\right). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь: $h=\dfrac{|\rho|-\rho_0}{\rho_0\dot{x}^2}$ – коэффициент, определяющий относительное изменение коэффициента трения качения при единичном значении скорости движения центра колеса: $\dot{x}$=1, имеет размерность в $c^2/м^2$; ρ_0 — общепринятое значение коэффициента трения качения, не учитывающее динамику, т. е. скорость движения колеса. Зависимость (5), по мнению автора, будет более точно определять закон изменения для коэффициента трения качения.

Данное уточнение позволяет наиболее просто объяснить причину нечувствительности теории поликомпонентного сухого трения и, как следствие, несовпадение формул В.Ф. Журавлева для случая качения в сравнении с приведенными здесь формулами (1)–(3). В теории поликомпонентного сухого трения, согласно [17–21], за основу принята формула [39]: $\sigma_{кач}(x,y)=\sigma(x,y)\left(1+\mathrm{h}'x\right)$, где $\sigma(x,y)$ определяет закон изменения нормальных напряжений, который, ввиду невозможности его точного нахождения, обычно задают по формуле Герца [16]; h' — устанавливает смещение центра тяжести диаграммы нормальных напряжений в направлении качения. Нетрудно видеть, что h' и h имеют близкое смысловое значение. Существенным недостатком приведенного соотношения для определения $\sigma_{кач}(x,y)$ является то, что оно стационарно и никак не учитывает динамику качения. Этот недостаток, по мнению автора, можно было частично исправить, если смещение центра тяжести диаграммы напряжений учитывать в зависимости от изменения скорости движения центра колеса $\dot{x}$, т. е. в динамике: $\sigma_{кач}(x,y)=\sigma(x,y)\left(1+\mathrm{h}'\left(\upsilon+\mathrm{R}\dot{\beta}\right)\right)$. А самое главное, в этом случае теория В.Ф. Журавлева стала бы чувствительной и к изменениям угловой скорости $\dot{\beta}$ напрямую, а не косвенно — через скорость проскальзывания υ, как это делалось ранее.

2. Задачи скольжения тела с верчением [17].

$$F=F_0\frac{|\upsilon|+\Delta}{|\upsilon|+b\varepsilon|\dot{\gamma}|+\Delta},\quad F_0=F\big|_{\dot{\gamma}\equiv 0}=fN; \tag{6}$$

$$M_z=M_{z0}\frac{\varepsilon|\dot{\gamma}|+\Delta}{\varepsilon|\dot{\gamma}|+a|\upsilon|+\Delta}, M_{z0}=M_z\big|_{\upsilon\equiv 0}=\tilde{\rho}N. \tag{7}$$

Здесь F, M_z – соответственно сила трения скольжения, момент трения верчения; N – сила давления; $\upsilon,\dot{\gamma}$ – кинематические скорости скольжения, верчения; a,b,Δ – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально; ε – средний радиус пятна контакта; $f,\tilde{\rho}$ – коэффициенты трения соответственно скольжения и верчения, которые определяются согласно закону Амонтона – Кулона, справедливость которого предполагается для скольжения и верчения, когда они присутствуют порознь:

$$f = f_0 sign\upsilon, при\ \upsilon \neq 0; [-f_1, f_1], при\ \upsilon \equiv 0, если\ \dot{\gamma} \equiv 0;;$$
$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 sign\dot{\gamma}, при\ \dot{\gamma} \neq 0; [-\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1], при\ \dot{\gamma} \equiv 0, если\ \upsilon \equiv 0;$$

1. Формула (6) определяет, какая часть от F_0 — силы трения при чистом скольжении — приходится в данный момент времени на силу трения скольжения. Здесь следует иметь в виду, что увеличение $|\upsilon|$, согласно гипотезе 4, приводит к росту площади зоны скольжения, а значит, и росту силы давления, приходящейся на данную зону, и тем самым, согласно закону Амонтона – Кулона, к росту силы трения скольжения. Рост угловой скорости верчения по модулю, согласно гипотезе 4, ведет к росту зоны верчения, что может происходить только за счет уменьшения зоны скольжения, а значит, — к уменьшению силы трения скольжения. Максимальное по модулю значение силы трения скольжения достигается, когда пятно контакта полностью занято зоной скольжения, т. е. при $\dot{\gamma} \equiv 0$.

2. Формула (7) определяет, какая часть от M_{z0} — момента трения при чистом верчении — приходится в данный момент времени на момент трения верчения. Здесь следует иметь в виду, что увеличение $|\dot{\gamma}|$, согласно гипотезе 4, приводит к росту площади зоны верчения, а значит, и росту силы давления, приходящейся на данную зону, и тем самым, согласно закону Амонтона – Кулона, к росту момента трения верчения. Рост скорости скольжения по модулю, согласно гипотезе 4, ведет к росту зоны скольжения, что может происходить только за счет уменьшения зоны верчения, а значит, — к уменьшению момента трения верчения. Максимальное значение по модулю момента трения верчения достигается, когда пятно контакта полностью занято зоной верчения, т. е. при $\upsilon \equiv 0$.

Здесь полученные формулы подтверждают теорию поликомпонентного сухого трения [17].

3. Задачи бурения (проникания, сверления и заглаживания) [22–27]**.**

$$F_c = F_0 \frac{\upsilon + \Delta}{\upsilon + b\varepsilon|\dot{\gamma}| + \Delta}; \quad (8)$$

$$M_c = \tilde{\rho} F_0 \frac{\upsilon + \Delta}{\upsilon + b\varepsilon|\dot{\gamma}| + \Delta}. \quad (9)$$

Здесь F_c, M_c – соответственно сила лобового сопротивления и момент сопротивления вращению (верчению); F_0 – коэффициент, определение которого показано в работах [22-27]; $\upsilon, \dot{\gamma}$ – кинематические скорости погружения (проникания) и вращения (верчения) рабочего органа; b, Δ – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально; ε – средний радиус пятна контакта; $\tilde{\rho}$ – удельный момент сопротивления на единицу давления в забое, имеющий физическую природу, близкую к коэффициенту трения скольжения, который, будем полагать, изменяется согласно закону Амонтона – Кулона:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 sign\dot{\gamma}, при\ \dot{\gamma} \neq 0; [-\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1], при\ \dot{\gamma} \equiv 0, если\ \upsilon \equiv 0.$$

При определении силовых компонент сопротивления при погружении (проникании) следует принимать во внимание средний радиус кинематической зоны погружения (проникания) как аналог среднего радиуса миделевого сечения тела. В приведенных формулах учтено, что при увеличении скорости погружения υ будет расти кинематическая зона погружения, а значит, и ее средний радиус, приводящий к росту силы лобового сопротивления (как возрастание силы лобового сопротивления при росте радиуса миделевого сечения в задачах проникания при обычном подходе). При увеличении угловой скорости вращения (верчения) по модулю $|\dot{\gamma}|$ (в задачах бурения и заглаживания $\dot{\gamma}$ может менять свой знак) будет расти кинематическая зона верчения за счет уменьшения кинематической зоны погружения, т.е. в этом случае будут уменьшаться средний радиус кинематической зоны погружения и сила лобового сопротивления тоже. Все это учтено в формуле (8), а формула (9) записана в соответствии с законом Амонтона– Кулона. Заметим, что в задачах проникания для тел вращения [10–14], входящих в сопротивляющуюся среду с большой скоростью υ, в приведенных формулах (8) и (9) следует использовать аппроксимацию Паде более высокого порядка.

Здесь ранее введенные формулы для задач бурения подтверждаются [22–24].

Выводы

1. Новая теория очень хорошо объясняет и обосновывает известные аналитические зависимости для силовых компонент сопротивления от кинематических скоростей для контактных задач с комбинированной кинематикой.

2. Для случаев скольжения тела с верчением [17], бурения [22–24] и заглаживания [25–27] формулы для нахождения сил сопротивления полностью подтвердились.

3. Для случая качения были получены иные формулы, чем те, которые используются в теории поликомпонентного сухого трения [17]. Автор объясняет это отсутствием чувствительности теории В.Ф. Журавлева к изменениям угловой скорости качения.

4. Новая теория дает общий подход к решению динамических задач контактного взаимодействия для тел с комбинированной кинематикой.

5. Теория нуждается в экспериментальной проверке гипотезы о существовании кинематических зон на мезомасштабном и макромасштабном уровнях в поверхностном слое трущихся тел с комбинированной кинематикой движения (только при качении с проскальзыванием имеется прямое экспериментальное подтверждение гипотезы).

Литература

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

2. Балицкий П.В. Взаимодействие бурильной колонны с забоем скважины. М.: Недра, 1975. 293 с.

3. Керимов З.Г. Динамические расчеты бурильной колонны. М.: Недра, 1970. 160 с.

4. Юнин Е.К., Хегай В.К. Динамика глубокого бурения. М.: Недра-Бизнесцентр, 2004. 286 с.

5. Юнин Е.К. Низкочастотные колебания бурильного инструмента. М.: Недра, 1983. 132 с.

6. Нагаев Р.Ф., Исаков К.А., Лебедев Н.А. Динамика горных машин. СПб.: Изд-во СППГИ (ТУ), 1996. 155 с.

7. Кожевников И.Ф. Динамика колес с деформируемой периферией. Обзор. - Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. 2009. С. 53-84.

8. Голечков Ю.И., Корольков Е.П. О моделях контактного взаимодействия колеса и рельса в динамике транспортных систем // Наука и техника транспорта. 2011. № 3. С. 39-43.

9. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 272 с.

10. Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.

11. Баженов В.Г., Котов В.Л. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.

12. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 105 с.

13. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В.Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 4. 686 с.

14. Баженов В.Г., Котов В.Л. Численно-аналитический метод исследования устойчивости движения тел вращения в мягких грунтовых средах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 6. С. 688-698.

15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

16. Hertz H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper // J. Reine und Angewandte Mathematica. l882. Vol. 92. P. 156-171.

17. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2010. 164 с.

18. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, Вып. 5. С. 762-767.

19. Журавлев В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 81–88.

20. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О механизме явления шимми // Докл. Акад. наук. 2009. Т. 428, № 6. С. 761–765.

21. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Теория явления шимми // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2010. № 3. С. 22–29.

22. Коронатов В.А. Начала построения строгой теории бурения // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 4 (32). С. 83-94.

23. Коронатов В.А. Элементы строгой теории бурения // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО17): сб. ст. М., 2017. С. 221-226.

24. Коронатов В.А. Новый метод описания процесса бурения скважин и обнаружение режимов детерминированного хаоса // Проблемы механики современных машин: материалы VI междунар. конф. М., 2015. С. 127-140.

25. Коронатов В.А., Герасимов С.Н. Виброврращательное погружение диска в пластическую среду и явление атипичного детерминированного хаоса // Системы Методы Технологии. 2017. № 2 (34). С. 21-27.

26. Коронатов В.А., Герасимов С.Н. Виброврращательное погружение рабочего органа в пластическую среду // Механики XXI веку. 2017. № 16. С. 280-285.

27. Коронатов В.А., Герасимов С.Н. Возникновение детерминированнного хаоса при моделировании работы дисковой заглаживающей машины с учетом подтапливания при обработке не затвердевшей поверхности бетонной смеси // Проблемы механики современных машин: сб. ст. М., 2015. С. 140-152.

28. Коронатов В.А. Новая теория качения на примере описания движения ведущего колеса локомотива (автомобиля) // Системы Методы Технологии. 2017, № 4 (36). С. 78-86.

29. Коронатов В.А. Обобщение качественно новой теории качения колеса при описании явления шимми// Системы Методы Технологии. 2018. № 1 (37). С. 45-55.

30. Коронатов В.А. Представление новой теории качения на примере описания движения ведомого колеса локомотива (автомобиля) // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2018. № 1(57). С. 49-60.

31. Rynolds O. On rolling friction // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1876. Vol. 166 (I). P. 155-174.

32. Панин В.Е., Гриняев Ю.В. Физическая мезомеханика - новая парадигма на стыке физики и механики деформируемого твердого тела // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6, № 4. С. 9-36.

33. Панин В.Е. Основы физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. 1998. № 1. С. 5-22.

34. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Панин А.В. Физическая мезомеханика деформируемого твердого тела как многоуровневой системы. I. Физические основы многоуровневого подхода // Физическая мезомеханика. 2006. Т. 9, № 3. С. 9-22.

35. Панин В.Е., Панин А.В. Эффект поверхностного слоя в деформируемом твердом теле. // Физическая мезомеханика. 2005. Т. 8, № 5. С. 7-15.

36. Панин В.Е., Колубаев А.В., Слосман А.И., Тарасов С.Ю., Панин С.В., Шаркеев Ю.П. Износ в парах трения как задача физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3, № 1. С. 67-74.

37. Панин В.Е., Почивалов Ю.И., Моисеенко Д.Д., Максимов П.В., Бикинеев Г.Ш. Трибоконтакт в парах трения как многоуровневая иерархически организованная система // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13, № 6. С. 27-34.

38. Панин В.Е., Горячева И.Г., Моисеенко Д.Д., Панин А.В., Почивалов Ю.И., Панин С.В. Мезомеханика сопряжения упрочненного поверхностного слоя с упруго нагруженной подложкой в парах трения // Физическая мезомеханика. 2005. Т. 8, № S. С. 13-16.

39. Svendenius J. Tire Models for Use in Braking Applications // Department of Automatic Control Lund Institute of Technology. Lund, 2003. P. 95.

References

1. Goryacheva I.G. Mechanics of friction interaction. M.: Nauka, 2001. 478 p.

2. Balickij P.V. Interaction of the drill string with the well face. M.: Nedra, 1975. 293p.

3. Kerimov Z.G. Dynamic calculations of the drill string. M.: Nedra, 1970. 160 p.

4. Yunin E.K., Hegai V.K. Dynamics of deep drilling. M.: Nedra-Business Center, 2004. 286 p.

5. Yunin E.K. Low-Frequency oscillations of the drilling tool. M.: Nedra, 1983. 132 p.

6. Nagaev R.F., Isakov K.A., Lebedev N.A. Dynamics of mining machines. SPb.: Izd-vo SPPGI (TU), 1996. 155 p.

7. Kozhevnikov I.F. Dynamics of wheels with deformable periphery. Overview. M.: Vychisl. tsentr im. A.A. Dorodnitsyna: Ros akad. nauk. 2009. P. 53-84.

8. Golechkov Yu.I., Korol'kov E.P. About models of contact interaction of a wheel and a rail in dynamics of transport systems // Science and Technology in Transport. 2011. № 3. P. 39-43.

9. Levin M.A., Fufaev N.A. The theory of rolling of a deformed wheel. M.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. P. 272.

10. Sagomonyan A.Ya. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299p.

11. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Mathematical modeling of unsteady processes of impact and penetration of axisymmetric bodies and identification of properties of soil media. M.: Fizmatlit, 2011. 208 p.

12. Aptukov V.N., Murzakaev R.T., Fonarev A.V. Applied theory of penetration. M.: Nauka, 1992. 105 p.

13. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L., Kochetkov A.V. Investigation of impact and penetration of bodies of rotation into soft ground // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. T. 67, № 4. 686 p.

14. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Numerical and analytical method of studying the stability of the motion of bodies of rotation in soft soil media // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. T. 81, № 6. P. 688-698.

15. Dzhonson K. Mechanics of contact interaction. M.: Mir, 1989. 510 p.

16. Hertz H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper // J. Reine und Angewandte Mathematica. l882. Vol. 92. P. 156-171.

17. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk, NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». In-t komp'yuternyh issled., 2010. 164 p.

18. Zhuravlev V.F. On the model of dry friction in the problem of rolling of solids // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1998. T. 62, Vyp. 5. P. 762-767.

19. Zhuravlev V.F.Regularities of friction with a combination of sliding and turning // Mechanics of Solids. 2003. № 4. P. 81-88.

20. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. On the mechanism of the phenomenon of shimmers // Dokl. Ros. akad. nauk. 2009. T. 428, № 6. P. 761-765.

21. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Theory of the Shimmi phenomenon // Mechanics of Solids. 2010. № 3. P. 22-29.

22. Koronatov V.A. Beginning of the construction of the strict theory of drilling // Systems. Methods. Technologies. 2016. № 4 (32). P. 83-94.

23. Koronatov V.A. Elements of the strict theory of drilling in the collection: Mathematics, its applications and mathematical education (MPMO17): sb. st. M., 2017. P. 221-226.

24. Koronatov V.A. New method of describing the process of drilling wells and detecting modes of deterministic chaos // Problemy mekhaniki sovremennyh mashin: materialy VI mezhdunar. konf. M., 2015. P. 127-140.

25. Koronatov V.A., Gerasimov S.N. Vibropresarea immersion of the disc in the plastic environment and the phenomenon of atypical de-terminated the chaos // Systems Methods Technologies. 2017. № 2 (34). P. 21-27.

26. Koronatov V.A., Gerasimov S.N. Vibratory immersion of the working body in the plastic environment // Mekhaniki XXI veku. 2017. № 16. P. 280-285.

27. Koronatov V.A., Gerasimov S.N. The emergence of deterministic chaos in the modeling of the disk-Ironing machine, taking into account the heat treatment in the treatment of not hardened surface of the concrete mixture // Problemy mekhaniki sovremennyh mashin: sb. st. M., 2015. P. 140-152.

28. Koronatov V.A. New theory of rolling, for example describing the motion of the drive wheel of the locomotive (car) system // Systems Methods Technologies. 2017, № 4 (36). P. 78-86.

29. Koronatov V.A. Generalization of a qualitatively new theory of wheel rolling in the description of the shimmy phenomenon // Systems. Methods. Technologies. 2018. № 1 (37). P. 45-55.

30. Koronatov V.A. The theory of rolling, for example describing the motion of the driven wheels of the locomotive (car) // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2018. № 1 (57). P. 49-60.

31. Rynolds O. On rolling friction // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1876. Vol. 166 (I). P. 155-174.

32. Panin V.E., Grinyaev Yu.V. Physical mesomechanics - a new paradigm at the interface of physics and mechanics of deformable solids // Physical Mesomechanics. 2003. T. 6, № 4. P. 9-36.

33. Panin V.E. Fundamentals of physical mesomechanics // Physical Mesomechanics. 1998. № 1. P. 5-22.

34. Panin V.E., Egorushkin V.E., Panin A.V. Physical mesomechanics of a deformable solid as a multi-level system. I. Physical fundamentals of the multilevel approach // Physical Mesomechanics. 2006. T. 9, № 3. P. 9-22.

35. Panin V.E., Panin A.V. Effect of the surface layer in a deformable solid //Physical Mesomechanics. 2005. T. 8, № 5. P. 7-15.

36. Panin V.E., Kolubaev A.V., Slosman A.I., Tarasov S.Yu., Panin S.V., Shrkeev Yu.P. Wear in friction pairs as a problem of physical mesomechanics // Physical Mesomechanics. 2000. T. 3, № 1. P. 67-74.

37. Panin V.E., Pochivalov Yu.I., Moiseenko D.D., Maksimov P.V., Bikineev G.Sh. Tribocontact in friction pairs as a multilevel hierarchically organized system// Physical Mesomechanics. 2010. T. 13, № 6. P. 27-34.

38. Panin V.E., Goryacheva I.G., Moiseenko D.D., Panin A.V., Pochivalov Yu.I., Panin S.V. Mechanics of conjugation of the hardened surface layer with the elastically loaded substrate in friction pairs // Physical Mesomechanics. 2005. T. 8, № S. P. 13-16.

39. Svendenius J. Tire Models for Use in Braking Applications // Department of Automatic Control Lund Institute of Technology. Lund, 2003. 95 p.