УДК 681.5 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-2-96-99

Методика понижения размерности разреженных матриц

Ю.Н. Алпатов[a], М.С. Козачук[b]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]iipm@brstu.ru, [b]autumnray@yandex.ru
[a]https://orcid.org/0000-0003-4942-3349, [b]https://orcid.org/0000-0002-3504-5642
Статья поступила 15.04.2018, принята 8.05.2018

Одной из задач проектирования систем управления является нахождение неизвестных параметров проектируемой системы W(S). Основываясь на структурной схеме, можно получить матрицу компонентов и матрицу структуры, что, в свою очередь, позволит записать уравнение системы с несколькими неизвестными в матричном виде. На практике полученная система W(S) после ряда преобразований имеет вид разреженной матрицы большой размерности, что значительно усложняет нахождение неизвестных переменных. Одним из способов упрощения расчетов является понижение размерности матрицы. Для решения данной задачи необходимо разбить исходную матрицу системы на блочные подматрицы H_1, H_2, H_3, H_4, представить в виде системы уравнений и найти необходимое условие существования решения. Это позволит преобразовать исходную систему таким образом, чтобы избавиться от операций нахождения обратной матрицы, требуемых для понижения размерности, что значительно упрощает вычисления.

Ключевые слова: матрица структуры; матрица компонент; понижение размерности; структурный граф.

The technique of lowering the dimension of sparse matrices

Yu.N. Alpatov[a], M.S. Kozachyuk[b]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]iipm@brstu.ru, [b]autumnray@yandex.ru
[a]https://orcid.org/0000-0003-4942-3349, [b]https://orcid.org/0000-0002-3504-5642
Received 15.04.2018, accepted 8.05.2018

One of the tasks of designing control systems is to find the unknown parameters of the projected system W(S). Based on the structural scheme, it is possible to obtain a matrix of components and a structure matrix, which, in turn, will allow us to write the equation of the system with several unknowns in a matrix form. In practice, the resulting system W(S) after a series of transformations has the form of a sparse matrix of large dimension, which greatly complicates the discovery of unknown variables. One way to simplify calculations is to reduce the dimension of the matrix. To solve this problem, it is necessary to divide the initial matrix of the system into block submatrices H1, H2, H3, H4. Then, to represent it as a system of equations and to find the necessary condition for the existence of a solution. This will transform the original system in such a way as to get rid of the operations of finding the inverse matrix required to reduce the dimension, which greatly simplifies the calculation.

Keywords: structure matrix; matrix of components; dimension lowering; structured graph.

Введение

В общем виде проектирование систем управления основано на структурно-параметрическом синтезе с формализацией структуры и нахождением параметров звеньев. Для этого сформулируем задачу синтеза системы управления:

- Проектирование системы с заданной передаточной функцией $W_t(S)$ либо заданными $x_{вх}(S)$ и $x_{вых}(S)$.
- Выбор структуры системы с учетом априорной определенности некоторых звеньев на основании статического расчета либо технической предопределенности.
- Построение синтезированной системы с передаточной функцией W(S) таким образом и с использованием таких дополнительных звеньев, чтобы выполнялось равенство $W(S) = W_t(S)$.

Для выполнения данного равенства необходимо при заданной структуре определить параметры звеньев W(S), часть из которых заранее известна.

Методика понижения размерности. Рассмотрим синтез на примере системы, структурная схема которой представлена на рис. 1.

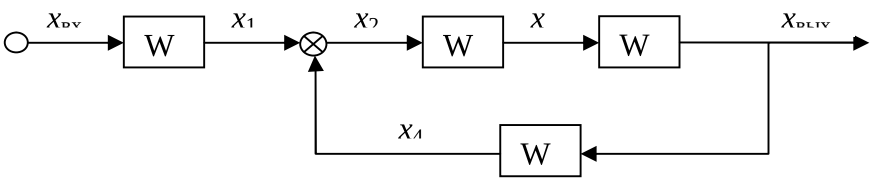

Рис. 1. Структурная схема системы

Дано: $x_{вх}$(S), x(S), W_0(S), W_1(S).
Найти: W_2(S), W_3(S).
Для удобства записи S опустим. W_0, W_1 — неизменяемая часть системы; W_2, W_3 — изменяемая.
Строим С-граф:

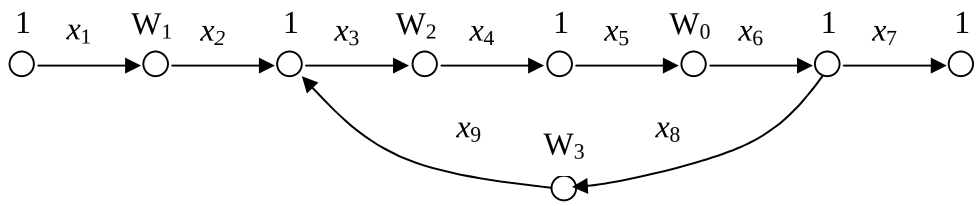

Рис. 2. Структурный граф системы

Перемножив матрицы структуры, компонентов и входных сигналов $[H]$:

$$\begin{bmatrix} W_1 & -1 & 0 & 0 & W_3 \\ 0 & W_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & W_0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Так как полученная матрица (1) имеет размерность 4x5, а неизвестных параметров x_i в уравнении — 5, то матрица имеет не единственное решение. Для доопределения уравнения воспользуемся эквивалентным преобразованием неизвестных звеньев $W_1 = W_2 = \frac{W}{2}$:

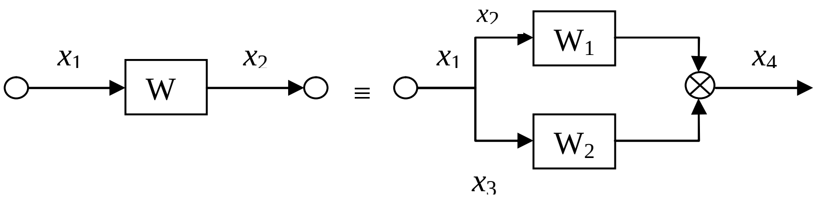

Рис. 3. Эквивалентное преобразование звена

Построим С-граф преобразованной системы:

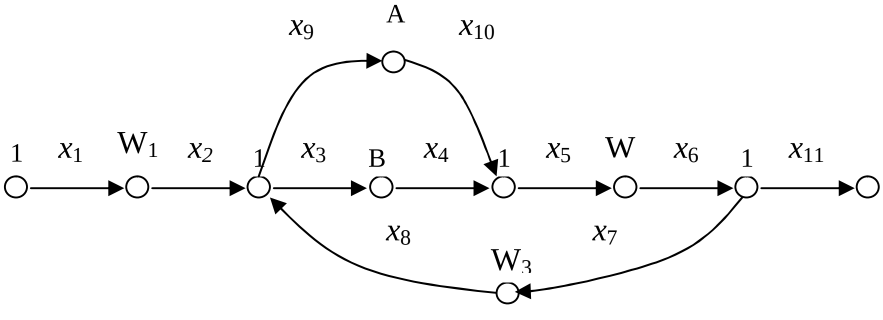

Рис. 4. Структурный граф преобразованной системы

Строим матрицу компонентов (2) и матрицу структуры (3):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = 0 \qquad (3)$$

В результате перемножения матриц (2) и (3) получим уравнение системы:

$$\begin{bmatrix} W_1 & -1 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & B & -1 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & W_0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & W_0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_9 \\ x_{11} \end{bmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Полученная матрица имеет высокую степень разреженности, и целесообразно будет понизить ее порядок. В строках исходной матрицы H, соответствующих узлам ветвления, происходит тождественное преобразование $x_i = x_j$, ведущее к увеличению размерности матрицы H и вектора $X_{вх}$, включающего идентичные сигналы. Желательно исключить подобные преобразования, не нарушая целостности модели.

Уравнение (4) позволяет выполнить часть исследований аналитически, не приступая к исследованиям на объекте.

Для этого представим исходную матрицу в виде блочных подматриц:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

В виде системы уравнений:

$$\begin{cases} H_1 * X_1 + H_2 * X_2 = 0; \\ H_3 * X_1 + H_4 * X_2 = 0. \end{cases}$$

Исключив X_2, получим:

$$[H_3 - H_4 * H_2^{-1} * H_1][X_1] = 0 \qquad (5)$$

$[H'][X_1] = 0$, где H_2^{-1}- матрица, обратная H_2

Условием решения будет:

$$\det H_2 \neq 0 \qquad (6)$$

Воспользовавшись инвариативностью матрицы H, можно переставить столбцы и строки уравнения:

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 & W_3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & B & A \\ 0 & -1 & 0 & W_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & W_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{11} \\ x_7 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_9 \end{bmatrix} = 0 \qquad (7)$$

где:

$$H_1 = \begin{bmatrix} W_1 & W_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};\ H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & W_0 \\ 0 & -1 & W_0 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{11} \\ x_7 \\ x_5 \end{bmatrix};\ X_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

Дальнейшие расчеты позволяют понижать размерность разреженной матрицы (5) путем выделения сколько угодно большого числа блочных подматриц, но, вместе с тем, расчеты будут сильно усложняться, а количество ограничивающих условий будет расти прямо пропорционально количеству блоков, на которые разбивается исходная матрица. Операция нахождения обратной матрицы по формулам Крамера очень сложна.

Для упрощения вычисления обратной подматрицы H_2 с учетом выполнения условия det $H_2 \neq 0$ переставим строки и столбцы таким образом, чтобы H_2 состояла из –1, расположенных по диагонали, начиная с правого верхнего угла исходной матрицы H (6):

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перестановку будем выполнять следующим образом.

В исходном уравнении выделяются строки, состоящие из 1 и –1 (такие строки получаются при описании узлов 2-го рода тогда, когда входной для всего графа сигнал входит в описываемый узел). Далее определяем, какие столбцы в отобранных строках содержат –1. Последовательно переставляем столбцы в правую часть матрицы, переставляя при этом соответствующие строки в матрице X: первый отобранный столбец — на последнее место, второй отобранный столбец — на предпоследнее и т. д. В каждом переставляемом столбце строку, содержащую –1, переставляем так, чтобы –1 располагались по диагонали, начиная с верхнего правого угла матрицы H.

Произведя перестановку строк и столбцов матрицы H (и, соответственно, строк матрицы X), выделяем блочную подматрицу H_2 с элементами {0, –1}.

Столбцам матрицы H_2, сформированной данный способом, соответствуют сигналы матрицы X, исходящие из узлов 2-го рода. Поскольку узел 2-го рода имеет единичный коэффициент передачи, то каждый его исходящий сигнал равен входящему сигналу. Таким образом, возможно исключение из матрицы X сигналов, соответствующих столбцам матрицы H_2, и соответствующих столбцов из матрицы H. При этом не будет нарушена зависимость между параметрами системы.

Размер матрицы H_2 (s×s) определяется уравнением:

$$S = \sum_{i=1}^{r_2} S_i,$$

где r_2 — число узлов ветвления; S_i — число выходящих дуг узла *i*.

Определитель данной матрицы H_2:

$$Det\ H_2 = (-1)x^S \neq 0 \qquad (8)$$

что удовлетворяет условия решения (6).

Для матрицы S вида (зеркально-единичная):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Справедливо тождество:

$$S^{-1} = S \quad (10)$$

Если вынести из матрицы H_2 -1 за знак матрицы, то она примет вид, идентичный матрице S, и будет справедливо тождество:

$$-1({H_2}^{-1}) = -1(H_2) \quad (11)$$

Следовательно, выполняется условие решения уравнения (8) и отпадает необходимость вычисления обратной матрицы H_2^{-1} (11).

Можно вынести –1 из матрицы H_2, тогда уравнение примет вид:

$$[H_3 + H_4 * H_2 * H_1][X_1] = 0 \quad (12)$$

Одним из важнейших свойств матрицы вида *S* является то, что при умножении на неё матрицы *M* происходит инвертирование столбцов матрицы *M*, при этом элементы остаются неизменёнными:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{1n} & & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{3n} & & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ a_{kn} & \cdots & a_{k3} & a_{k2} & a_{k1} \end{bmatrix}$$

Назовём такую матрицу $M_{инв}$.

Применимо к (12) получим:

$$[H_3 + H_{4инв} \, H_1][X_1] = 0 \quad (13)$$

Выводы

Полученные преобразования позволяют уйти от операций обращения матрицы и умножения матриц, что при расчетах дает выигрыш во времени, пропорциональный размерности исходной матрицы H.

Литература

1. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов: моногр. Иркутск: ИГУ, 1988. 184с.

2.Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space, Philosophical Magazine, 1901. № 2. P. 559-572.

3. Цвиркун А.Д. Структура сложных систем. М.: Сов. радио, 2004.

4. Мухин В.И. Исследование систем управления. М., 2005.

5. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными системами. М.: Наука, 2007.

6. Авербах И.Л., Цурков В.И. Оптимизация в больших задачах с целочисленными переменными. М.: Наука: Физматлит, 1995. 288 с.

7. Левин Г.М., Танаев В.С. Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений. Минск: Наука и техника, 1978. 240 с.

8. Щербина О.А. Локальные алгоритмы для блочноçдревовидных задач дискретного программирования // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 25-28.

9. Werner R., Schetelig D., Sothmann T. Low Rank and Sparse Matrix Decomposition as Stroke Segmentation Prior. A Random Forest-Based Evaluation Study // Bildverarbeitungf¨ur die Medizin. 2017. P. 45-49.

10. Жигульская В.Ю. Численные методы. Луганск: Альмаçматер, 2005. 137 с.

11. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разрежённых систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.

12. Лемтюжникова Д.В. Декомпозиция разреженных матриц в задачах целочисленного программирования // Математические методы распознавания образов: материалы 19-ой Всерос. конф. М., 2017. С. 113-117.

References

1. AlpatovYu.N. Synthesis of control systems by the method of structural graphs.:monogr. Irkutsk: IGU, 1988. 184 p.

2. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space, Philosophical Magazine, 1901. № 2. P. 559-572.

3. Cvirkun A.D.The structure of complex systems. M.: Sov. radio, 2004.

4. Muhin V.I. Study of control systems. M., 2005.

5. Rastrigin L.A.Modern principles of management of complex systems. M.: Nauka, 2007.

6. Averbah I.L., Curkov V.I. Optimization in large problems with integer variables. M.: Nauka: Fizmatlit, 1995. 288p.

7. Levin G.M., Tanaev V.S. Decomposition methods of optimization of design solutions. Minsk: Naukaitekhnika, 1978. 240 p.

8. Sherbina O.A.Faddeev algorithm for local blocking discrete programming// Zhurn. vychisl. matematikiimatem. fiziki. 1985. T. 25, № 8. P. 25-28.

9. Werner R., Schetelig D., Sothmann T. Low Rank and Sparse Matrix Decomposition as Stroke Segmentation Prior. A Random Forest-Based Evaluation Study // Bildverarbeitungf¨ur die Medizin. 2017. P. 45-49.

10. Zhigul'skayaV.Yu.Numerical methods. Lugansk: Al'maçmater, 2005. 137p.

11. Dzhordzh A., LyuDzh. Numerical solution of large sparse systems of equations. M.: Mir, 1984. 333p.

12. Lemtyuzhnikova D.V. Decomposition of sparse matrices in integer programming problems // Matematicheskiemetodyraspoznavaniyaobrazov: materialy