УДК 004.501.551 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-2-7-75

Методы обработки экспериментальных данных при моделировании геофизических процессов

М.М. Ромаданова[a], Б.Г. Вагер[b]

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ул. 2-я Красноармейская 4, Санкт-Петербург, Россия
[a]romadanova@yandex.ru, [b]bgvager@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0003-1047-7390, [b]https://orcid.org/0000-0002-6662-5439
Статья поступила 22.03.2018, принята 27.04.2018

Рассматривается использование весового кубического сплайна при анализе геофизических данных. Предлагается методика расчета вертикальных производных от метеоэлементов по экспериментальным данным в пограничном слое атмосферы. Методика основана на применении метода регуляризации и использовании весовых кубических сплайнов. Это обосновывается тем, что в приземном слое атмосферы скорость ветра, температура, влажность и другие метеовеличины изменяются по логарифмическому закону. Приводится тестовый пример вычисления вертикальной производной, и полученные значения сравниваются с аналитическим выражением. Затем рассматривается сравнение значений вертикальных производных по экспериментальным данным, рассчитанным по сплайну и методом регуляризации. Приводятся примеры применения рассматриваемой методики для расчета коэффициента турбулентности из уравнений движения по данным о профиле скорости ветра в стационарных и горизонтально-однородных условиях. Показан вывод формулы вычисления коэффициента турбулентности из уравнений движения. Задача сводится к нахождению производных и интегралов заданных экспериментальных функций. Также продемонстрировано решение задачи на тестовом примере, где полученные значения коэффициента турбулентности сравниваются с аналитическим решением. Затем приводится вычисление коэффициента турбулентности по экспериментальным данным профилей скорости ветра.

Ключевые слова: математическое моделирование; стационарный горизонтально однородный пограничный слой атмосферы; скорость ветра; температура и влажность воздуха; коэффициент турбулентности; сплайны; весовой кубический сплайн; метод регуляризации; метод наименьших квадратов.

Methods for processing experimental data in modeling geophysical processes

M.M. Romadanova[a], B.G. Vager[b]

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; 4, 2-ya Krasnoarmeiskaya St., St. Petersburg, Russia
[a]romadanova@yandex.ru, [b]bgvager@mail.ru
[a]https://orcid.org/0000-0003-1047-7390, [b]https://orcid.org/0000-0002-6662-5439
Received 22.03.2018, accepted 27.04.2018

The use of a weighted cubic spline in the analysis of geophysical data is considered. A technique is proposed for calculating the vertical derivatives of meteorological elements from experimental data in the boundary layer of the atmosphere. The technique is based on the application of the regularization method and the use of weighted cubic splines. This is justified by the fact that in the surface layer of the atmosphere the wind speed, temperature and humidity, and other meteorological quantities vary according to the logarithmic law. A test case is given for calculating the vertical derivative, and the obtained values are compared with the analytical expression. Then, the comparison of vertical derivatives values from the experimental data calculated from the spline and the regularization method is considered. Examples of considered technique application for calculating the turbulence coefficient from the equations of motion from data on the wind speed profile in stationary and horizontally homogeneous conditions are given. The derivation of the formula for calculating the turbulence coefficient from the equations of motion is shown. The problem reduces to finding the derivatives and integrals of the given experimental functions. The solution of the problem in the test example is also demonstrated, where the obtained values of the turbulence coefficient are compared with the analytical solution. Then, the turbulence coefficient is calculated from the experimental data of wind speed profiles.

Keywords: mathematical modeling; stationary horizontally uniform atmospheric boundary layer; wind speed; temperature and humidity of the air; turbulence coefficient; splines; weighted cubic spline; regularization method; least square method.

Введение

При исследовании многих геофизических процессов, таких, например, как локальные прогнозы погоды, взаимодействие океана и атмосферы, влияние орошения на микроклимат пустынь, взаимодействие подстилающей поверхности со свободной атмосферой, и ряда других задач требуются надежные данные о вертикальной структуре метеорологических полей в пограничном слое атмосферы [1, 2]. При этом для большинства задач наибольший интерес представляют поля скорости ветра, температуры и влажности воздуха. Такую информацию о вертикальных профилях метеоэлементов можно получить из данных экспедиций по изучению структуры пограничного слоя атмосферы. Однако эти данные обычно имеются только на весьма ограниченном количестве уровней и в редкие сроки наблюдений [3].

Упомянутые выше задачи решаются в большинстве случаев методом математического моделирования, который требует более подробной информации о распределении метеоэлементов [4–9]. Поэтому возникает задача интерполирования имеющихся массивов экспериментальных данных на сетку с большим числом узлов. Для решения таких задач целесообразно использовать сплайны [10]. Как показано в работах [11, 12], метод сплайновой интерполяции с помощью кубического сплайна Акимы [13] обеспечивает для большинства метеорологических данных наиболее точную интерполяцию. Этот вывод был получен авторами в результате анализа пяти часто используемых методов интерполяции — линейной, логарифмической, оптимальной, а также интерполяции с помощью стандартного кубического сплайна и сплайна Акимы.

Интерполяция функций весовым кубическим сплайном. В данной статье рассматривается применение для решения вышеупомянутых задач предложенного Б.И. Квасовым [14, 15] весового кубического сплайна. Весовой кубический сплайн нужно использовать, когда требуется сохранить свойства монотонности и выпуклости интерполирующей функции. Алгоритмы построения весового кубического и бикубического сплайнов подробно изложены в [16]. Возможности их использования при анализе гидрометеорологической информации приведены в [17]. На основании результатов численных экспериментов авторы [17] делают вывод о том, что интерполяция весовыми кубическими сплайнами дает результаты, сходные с результатами интерполяции сплайнами Акимы [18, 19].

На рис. 1 приведены результаты интерполяции составляющих скорости ветра u и v.

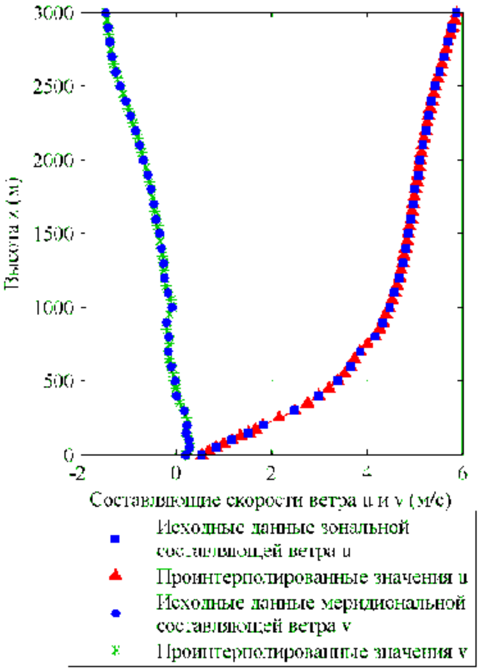

Рис. 1. Вертикальные профили скорости ветра

В качестве исходных данных были выбраны значения u и v в пределах высот 0 – 3 000 м для многолетнего января в 18 ч по станции Нижний Новгород за 1964–2010 гг. [11]. Как видно на рис. 1, интерполяция весовым кубическим сплайном сохраняет монотонность и выпуклость интерполируемой функции.

Методика расчета вертикальных производных. Для решения прикладных задач, кроме значений метеовеличин, необходимо знать их вертикальные производные. Трудность непосредственного определения этих производных по интерполируемой функции состоит в том, что в приземном слое атмосферы скорость ветра, температура, влажность и другие метеовеличины изменяются по логарифмическому закону [16, 17]. Поэтому, если аппроксимировать экспериментальные значения этих функций полиномами или сплайнами, то при вычислении производных от полиномиальной аппроксимации при малых z получим заведомо большие погрешности. К таким же погрешностям при вычислении производных приведет и использование конечно-разностных формул. Для повышения точности численного дифференцирования экспериментальных зависимостей применим комбинированную регуляризацию [20], которая состоит в следующем.

Допустим, что на интервале высот (z_0, z_N) задана экспериментальная зависимость $f(z)$, измеренные значения которой на уровнях наблюдений z_i обозначим через y_i ($y_i = f(z_i)$). Если существует некоторый интервал $(z_1, z_2) \in (z_0, z_N)$, на котором известен вид этой экспериментальной зависимости, то искомую функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \varphi(z, c_k) + S(z), \tag{1}$$

где $\varphi(z, c_k)$ — заданная функция аргументов z и c_k; c_k — подлежащие определению параметры; $S(z)$ — неизвестная пока функция.

Функция $\varphi(z, c_k)$ не должна сильно портить экспериментальную зависимость вне интервала (z_1, z_2), а входящие в нее параметры выберем из условия близости значений функции φ_k экспериментальным значениям y_i на интервале $[z_1, z_2]$. Составим затем разности $\bar{y}_i = y_i - \varphi(z_i, c_k)$ ($z_0 \le z_i \le z_N$) и по этим значениями $\bar{y}_i$ построим сплайн $S(z)$. Очевидно, что на интервале $[z_1, z_2]$ сплайн мал и играет роль поправки.

В качестве функции $\varphi(z, c_k)$ в нашем случае следует взять логарифмическую зависимость:

$$\varphi(z, c_k) = c_1 \ln(z) + c_2 . \tag{2}$$

Тогда окончательное выражение для функции $f(z)$ будем считать следующим:

$$f(z) = c_1 \ln(z) + c_2 + a_{0i} + a_{1i}(z_i - z) + \\ + a_{2i}(z_i - z)^2 + a_{3i}(z_i - z)^3 , \tag{3}$$

где a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} — коэффициенты весового кубического сплайна $S(z)$. Как видно из (3), производные и интегралы от функции $f(z)$ вычисляются аналитически.

Так как функция $\varphi(z, c_k)$ зависит от c_k линейно, то для определения этих параметров можно применить метод наименьших квадратов [20]. Тогда параметры c_1 и c_2 определяются из условия:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i (\varphi_i - y_i)^2 = \min_i , \qquad (4)$$

где ω_i — некоторые веса, значения которых выбираются убывающими с ростом z и равными нулю выше приземного слоя атмосферы, где разрушается логарифмическая зависимость. Условие (4) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{N} \omega_i \ln^2(z_i) + c_2 \sum_{i=1}^{N} \omega_i \ln(z_i) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i y_i \ln(z_i) \\ c_1 \sum_{i=1}^{N} \omega_i \ln(z_i) + c_2 \sum_{i=1}^{N} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i y_i \end{cases} \qquad (5)$$

Определив из этой системы уравнений параметры c_1 и c_2, получим искомую функцию $f(z)$.

Расчет значений производных. В качестве теста для проверки была выбрана функция, соответствующая линейно-логарифмическому профилю скорости ветра в пограничном слое атмосферы [16, 17]:

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + \frac{\beta}{L} z\right). \qquad (6)$$

Значения параметров в формуле (6) были следующими: постоянная Кармана $\kappa = 0{,}4$; касательное напряжение $u_* = 0{,}3$ м/с; шероховатость подстилающей поверхности $z_0 = 10^{-2}$ м; L — масштаб Монина – Обухова [21]; $\frac{\beta}{L} = 10^{-2}$ м$^{-1}$. Результаты расчетов производной этой функции и сравнение их с точными значениями приведены в табл. 1, максимальная погрешность в определении производной не превышает 1 %.

Таблица 1

Сравнение рассчитанных и точных значений производных

z	u	w	$\frac{du}{dz}$ точн.	$\frac{du}{dz}$ рас.
2	3,9879	1,00	0,3825	0,3855
4	4,5230	1,00	0,1950	0,1942
8	5,0736	1,00	0,1012	0,1015
10	5,2558	0,50	0,0825	0,0824
20	5,8510	0,25	0,0450	0,0451
30	6,2291	0,00	0,0325	0,0325
50	6,7622	0,00	0,0225	0,0225
100	7,6579	0,00	0,0150	0,0150
150	8,3364	0,00	0,0125	0,0125
300	9,9824	0,00	0,0100	0,0100
500	11,8649	0,00	0,0090	0,0090
800	14,4666	0,00	0,0084	0,0084
1 000	16,1339	0,00	0,0082	0,0082
1 400	19,3870	0,00	0,0080	0,0080

Сравнение значений вертикальных производных, рассчитанных по сплайну и методом регуляризации, проводились по данным о скорости ветра u и v в пределах высот от 0 до 900 м. Как видно (табл. 2), в нижней части приземного слоя ($0 < z < 25$ м) расхождения в значениях производных достаточно большие, в то время как выше приземного слоя ($z > 150$ м) эти расхождения близки к 0. Поэтому, если требуется вычислить значения вертикальных производных вблизи земной поверхности, целесообразно пользоваться методом регуляризации.

Таблица 2

Значения производных, рассчитанных по сплайнам ($\left(\frac{\partial u}{\partial z} c\right)$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial z} c\right)$) и методом регуляризации ($\left(\frac{\partial u}{\partial z} p\right)$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial z} p\right)$)

z_i	ω_i	u_i	$\frac{\partial u}{\partial z_i} c$	$\frac{\partial u}{\partial z_i} p$	v_i	$\frac{\partial v}{\partial z_i} c$	$\frac{\partial v}{\partial z_i} p$
0,25	2,0	3,28	4,56	2,39	1,96	1,69	1,43
0,50	2,0	3,68	1,35	1,14	2,21	0,66	0,77
1,00	1,0	4,10	0,89	0,63	2,52	0,50	0,38
2,00	1,0	4,50	0,19	0,285	2,76	0,17	0,12
10,00	0,5	5,72	0,06	0,075	3,38	0,018	0,017
25,00	0,25	6,72	0,056	0,051	3,50	0,0047	0,0048
50,00	0	7,36	0,013	0,014	3,57	0,0013	0,0016
75,00	0	7,82	0,026	0,025	3,60	0,002	0,002
100,00	0	8,52	0,023	0,023	3,65	0,004	0,004
125,00	0	8,95	0,016	0,016	3,62	–0,0013	–0,0013
150,00	0	9,40	0,018	0,019	3,60	–0,0013	–0,0012
175,00	0	9,80	0,014	0,014	3,55	–0,0021	–0,0021
200,00	0	10,16	0,026	0,026	3,50	–0,0024	–0,0024
250,00	0	11,06	0,015	0,015	3,33	–0,0036	–0,0036
300,00	0	11,60	0,0087	0,0086	3,11	–0,0065	–0,0065

z_i	ω_i	u_i	$\frac{\partial u}{\partial z_i}c$	$\frac{\partial u}{\partial z_i}p$	v_i	$\frac{\partial v}{\partial z_i}c$	$\frac{\partial v}{\partial z_i}p$
350,00	0	12,00	0,0062	0,0062	2,70	–0,0080	–0,0080
400,00	0	12,20	0,0026	0,0026	2,35	–0,0071	–0,0071
500,00	0	12,40	0,0028	0,0027	1,57	–0,0074	–0,0074
600,00	0	12,76	0,00028	0,00027	0,90	–0,0062	–0,0062
800,00	0	12.94	0,00031	0,00032	0.57	–0,00358	–0,00357
900,00	0	13,00	0,00042	0,00041	0,00	–0,00075	–0,00076

Вычисление коэффициента турбулентности. Рассмотрим возможность использования предложенной методики определения производных и интегралов от экспериментальных зависимостей для вычисления коэффициента турбулентности $k(z)$ по данным о скорости ветра.

В стационарном горизонтально-однородном пограничном слое атмосферы уравнения движения записываются в виде [16]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}k\frac{du}{dz}+\lambda\left(v-V_g\right)=0, \\ \frac{d}{dz}k\frac{dv}{dz}-\lambda\left(u-U_g\right)=0, \end{cases} \qquad (7)$$

где u и v — компоненты вектора скорости ветра; U_g и V_g — компоненты геострофического ветра; λ — параметр Кориолиса.

Преобразуем уравнения (7) так, чтобы иметь возможность найти распределение $k(z)$ по значениям скорости ветра. Для этого умножим первое уравнение системы (7) на v, второе — на u и вычтем одно из другого. Интегрируя по z и деля результат на $(uv'-vu')$, получим следующую формулу для $k(z)$:

$$k(z)=k_0+\frac{\lambda\int_{z_0}^{z}\left(u^2+v^2-uU_g-vV_g\right)dz}{uv'-vu'}, \qquad (8)$$

где z_0 — шероховатость подстилающей поверхности.

Задача вычисления коэффициента турбулентности свелась к нахождению производных и интегралов заданных экспериментальных функций u и v.

Хорошо известно [3, 17], что довольно значительный произвол в выборе функций $k(z)$ не сказывается существенным образом на годографе скорости ветра. В то же время, незначительные вариации профиля скорости приводят к заметным изменениям $k(z)$. Поэтому чрезвычайно важно достаточно точно вычислить производные и интегралы, входящие в формулу (8). Преимущество предлагаемой методики расчета состоит в том, что компоненты скорости ветра u и v представляются в виде (3), а в этом случае интегралы в формуле (8) удается вычислить в квадратурах и тем самым избежать дополнительных погрешностей, возникающих при замене интегралов квадратурными формулами.

Примеры вычисления коэффициента турбулентности. В качестве тестового примера вычисления коэффициента турбулентности было выбрано аналитическое решение системы (7), соответствующее постоянному профилю $k(z)=1$. В этом случае система (7) примет вид:

$$\begin{cases} u''+v=0 \\ v''-(u-1)=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z=z_0, & u=0, v=0 \\ z=H, & u=1, v=0 \end{cases}, \qquad (9)$$

где $U_g=1$, $V_g=0$, $\lambda=1$.

Было получено аналитическое решение системы (9), и для десяти различных значений высот были вычислены значения u и v, а затем по описанной методике определены производные и интегралы, входящие в формулу (8), и вычислен коэффициент турбулентности, причем коэффициент получился равным 1.

Еще одним тестом для проверки рассмотренной методики расчета $k(z)$ может служить хорошо известный лейпцигский профиль скорости ветра — измеренная ветровая спираль при почти нейтральных условиях. Именно эти данные использовал Леттау [22] для расчета коэффициента турбулентности, распределение которого по вертикали представлено на рис. 2.

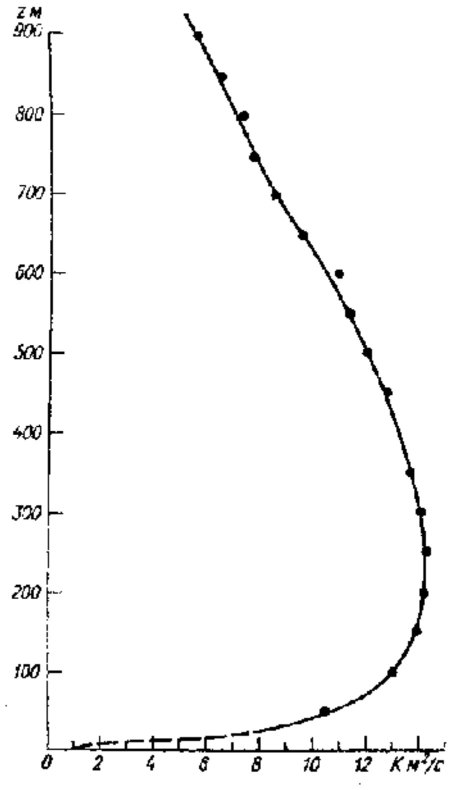

Рис. 2. Профиль коэффициента турбулентности, рассчитанный по лейпцигскому профилю ветра

Приведем пример расчета коэффициента турбулентности по формуле (8) по данным о скорости ветра u и v, приведенным в табл. 2.

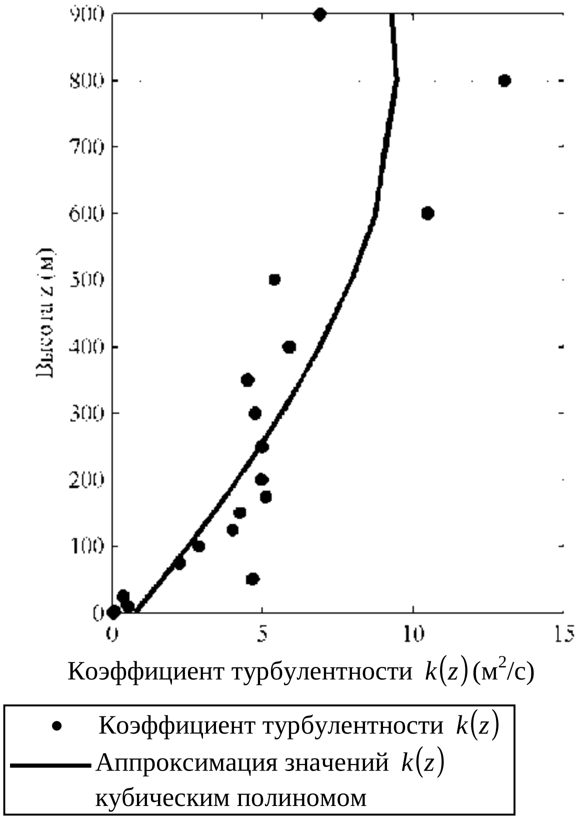

Рис. 3. Расчет коэффициента турбулентности по данным о скорости ветра из табл. 2

Анализ результатов численных экспериментов по вычислению $k(z)$ показал, что в среднем максимум $k(z)$ наблюдается на высотах 200–900 м. Для расчета профиля $k(z)$ требуются профили ветра, определенные за максимально длительный период, в течение которого не происходит заметного изменения стратификации.

При наличии горизонтальной неоднородности или при нестационарности пограничный слой атмосферы имеет совсем иные свойства. Профиль скорости ветра может быть крайне изменчив во времени и в пространстве. Суточный ход и обусловленные им изменения стратификации значительно усложняют дело. Коэффициент турбулентности очень чувствителен к изменению стратификации или параметра шероховатости. Практическая ценность результатов в этом случае будет не слишком велика. Очень большой разброс эмпирических значений $k(z)$ вызван мелкими различиями в стратификации.

Заключение

Рассмотренные примеры и анализ результатов других численных экспериментов позволяют сделать вывод о том, что интерполяция с помощью весового кубического сплайна и предлагаемый метод вычисления производных могут успешно применяться при обработке геофизических данных в пограничном слое атмосферы.

Литература

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.

2. Баранова М.Е., Гаврилов А.С., Шелутко В.А., Дмитриев В.В., Гудниченко В.Г. Анализ окружающей среды: моногр. СПб.: Изд-во РГГМУ, 2009. 186 с. (Экология и гидрометеорология больших городов и промышленных зон (Россия, Мексика); т. 1).

3. Орленко Л.Р. Строение планетарного пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1979. 270 с.

4. Харченко Е.В. Использование математических моделей переноса и рассеяния радионуклидов в атмосфере для управления рисками на стадии проектирования атомных электростанций : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. СПб., 2016. 26 с.

5. Sofiev M., Siljamo P., Valkama I., Ilvonen M., Kukkonen J. A dispersion modeling system SILAM and its evaluation against ETEX data // Atmospheric Environment. 2006. № 240. P. 674-685.

6. Radiation protection and safety of radiation sources: international basic safety standards. General safety requirements. Part 3. No GSR Part 3. IAEA, Vienna, 2014. 471 p.

7. European utility requirements for LWR nuclear power plants. Revision D. 2012. 321 c.

8. Gavrilov A.S. Stochastic modeling of nuclear turbulent diffusion. Diffusion in lowest troposphere // Proceeding of conference "Nuclear Risks, Environmental and Development Cooperation in The North of Europe" (Apatity, June 19-23, 1999), Umeå University, Sweden, 2000. P. 80-84.

9. Safety Reports Series No.19. Generic models for use in assessing the impact of discharges of radioactive substances to the environment. International Atomic Energy Agency, Vienna, 2001. 229 p.

10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайнфункций. М.: Наука, 1980. 352 с.

11. Алдухов О.А. О методах расчета и контроля данных по пограничному слою атмосферы // Труды ВНИИГМИ-МЦД. 2012. Вып. 176. С. 257–286.

12. Алдухов О.А., Черных И.В. Контроль качества и обработка данных / М-во природных ресурсов и экологии Российской Федерации, Федеральная служба по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды (Росгидромет), Всерос. науч.-исслед. ин-т гидрометеорологической информ.; Мировой центр данных. Обнинск: ВНИИГМИ-МЦД, 2013. 306 с. (Методы анализа и интерпретации данных радиозондирования атмосферы; т.1).

13. Hiroshi A. Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points // ACM Transactions on Mathematical Software. Vol. 4, № 2 (June, 1978). P. 148−159.

14. Kvasov B.I. Monotone and convex interpolation by weighted cubic splines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53, № 10. P. 1428-1439.

15. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.

16. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 751 с.

17. Гисина Ф.А., Лайхтман Д.Л., Мельникова И.Н., Палагин Э.Г. Динамическая метеорология. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 608 с.

18. Петрова А.В. Алгоритм построения весового бикубического сплайна, сохраняющего свойства выпуклости // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. тем. сб. тр. / СПбГАСУ СПб., 2015. Вып. 20. С. 8−12.

19. Петрова А.В., Вагер Б.Г. Весовые кубические и бикубические сплайны при анализе гидрометеорологических на-

блюдений // Труды Гл. геофиз. обсерватории им. А.И. Воейкова. 2016, № 583. С. 149-161.

20. Вагер Б.Г., Серков Н.К. Сплайны при решении прикладных задач метеорологии и гидрологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 160 с.

21. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. Т. 1. 694 с.

22. Lettau H.H. Theoretical wind spirals in the boundary layer of a barotropic atmosphere. Beithr. Phys. Atmos. 1962. № 35. P. 195-212.

References

1. Marchuk G.I. Mathematical modeling in the environmental problem. M.: Nauka, 1982. 319 p.

2. Baranova M.E., Gavrilov A.S., SHelutko V.A., Dmitriev V.V., Gudnichenko V.G. Environmental Analysis: monogr. SPb.: Izd-vo RGGMU, 2009. 186 p. (Ecology and hydrometeorology of large cities and industrial zones (Russia, Mexico); t.1).

3. Orlenko L.R. The structure of the planetary boundary layer of the atmosphere. L.: Gidrometeoizdat, 1979. 270 p.

4. Harchenko E.V. Use of mathematical models of transport and scattering of radionuclides in the atmosphere for risk management at the design stage of nuclear power plants: avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk. SPb., 2016. 26 p.

5. Sofiev M., Siljamo P., Valkama I., Ilvonen M., Kukkonen J. A dispersion modeling system SILAM and its evaluation against ETEX data // Atmospheric Environment. 2006. № 240. P. 674-685.

6. Radiation protection and safety of radiation sources: international basic safety standards. General safety requirements. Part 3. No GSR Part 3. IAEA, Vienna, 2014. 471 p.

7. European utility requirements for LWR nuclear power plants. Revision D. 2012. 321 p.

8. Gavrilov A.S. Stochastic modeling of nuclear turbulent diffusion. Diffusion in lowest troposphere // Proceeding of conference "Nuclear Risks, Environmental and Development Cooperation in The North of Europe" (Apatity, June 19-23, 1999), Umeå University, Sweden, 2000. P. 80-84.

9. Safety Reports Series No.19. Generic models for use in assessing the impact of discharges of radioactive substances to the environment. International Atomic Energy Agency, Vienna, 2001. 229 p.

10. Zav'yalov YU.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Methods of Spline Functions. M.: Nauka, 1980. 352 p.

11. Alduhov O.A. On methods of calculation and control of data on the atmospheric boundary layer // Trudy VNIIGMI-MCD. 2012. Vyp. 176. P. 257-286.

12. Alduhov O.A., CHernyh I.V. Quality control and data processing / M-vo prirodnyh resursov i ehkologii Rossijskoj Federacii, Federal'naya sluzhba po gidrometeorologii i monitoringu okruzhayushchej sredy (Rosgidromet), Vseros. nauch.-issled. in-t gidrometeorologicheskoj inform.; Mirovoj centr dannyh. Obninsk: VNIIGMI-MCD, 2013. 306 p. (Methods of analysis and interpretation the atmosphere radiosonde observations data. T.1.; t.1).

13. Hiroshi A. Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points // ACM Transactions on Mathematical Software. Vol. 4, № 2 (June, 1978). P. 148-159.

14. Kvasov B.I. Monotone and convex interpolation by weighted cubic splines // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53, № 10. P. 1428-1439.

15. Kvasov B.I. Methods of izogeometric spline approximation. M.: Fizmatlit, 2006. 360 p.

16. Matveev L.T. Course of general meteorology. Physics of the atmosphere. L.: Gidrometeoizdat, 1984. 751 p.

17. Gisina F.A., Lajhtman D.L., Mel'nikova I.N., Palagin EH.G. Dynamic meteorology. L.: Gidrometeoizdat, 1976. 608 p.

18. Petrova A.V. Algorithm for constructing a weighted bicubic spline preserving convexity properties // Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm: mezhvuz. tem. sb. tr. / SPbGASU SPb., 2015. Vyp. 20. P. 8-12.

19. Petrova A.V., Vager B.G. Weighted cubic and bicubic splines in the analysis of hydrometeorological observations // Trudy Gl. geofiz. observatorii im. A.I. Voejkova. 2016, № 583. P. 149-161.

20. Vager B.G., Serkov N.K. Splines in solving applied problems of meteorology and hydrology. L.: Gidrometeo-izdat, 1987. 160 p.

21. Monin A.S., YAglom A.M. Statistical hydrodynamics. SPb.: Gidrometeoizdat, 1992. T.1. 694 p.

22. Lettau H.H. Theoretical wind spirals in the boundary layer of a barotropic atmosphere. Beithr. Phys. Atmos. 1962. № 35. P. 195-212.