УДК 621.01:621.646 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-2-14-18

Плотность зазоров при нагружении сферических неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью

П.М. Огар[a], Е.В. Угрюмова[b]

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a]ogar@brstu.ru, [b]weblab@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0002-0764-2028
Статья поступила 2.04. 2018, принята 8.05. 2018

Статья является второй частью комплексного исследования контактных характеристик при внедрении сферических неровностей жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое упрочняемое полупространство и при сплющивании сферических неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью. В первой части исследовалась относительная площадь контакта. В настоящей работе исследования посвящены плотности зазоров в стыке. Свойства упругопластического упрочняемого материала описываются степенным законом Холломона. Для описания внедрения и сплющивания отдельной сферической микронеровности использованы результаты конечно-элементного моделирования. Для определения относительной площади контакта использована дискретная модель шероховатости в виде набора сферических сегментов, распределенных по высоте в соответствии с кривой опорной поверхности. Для этого использована регуляризованная неполная бета-функция, описывающая распределение материала по всей высоте шероховатого слоя. При определении плотности зазоров учитывался объем упругого продавливания вне зоны контакта единичной неровности. Получены аналитические выражения для определения плотности зазоров в стыке в зависимости от безразмерной нагрузки при внедрении и сплющивании сферических неровностей. Приведены соответствующие графические зависимости для разных значений параметров упрочнения. Указано, что случай сплющивания неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью наиболее способствует повышению герметичности в сравнении с внедрением неровностей.

Ключевые слова: шероховатая поверхность; плотность зазоров в стыке; сферическая неровность; упругопластический контакт; упрочняемый материал; внедрение сферы; сплющивание сферы.

Density of gaps when spherical asperities of rough surface are loaded by rigid flat surface

P.M. Ogar[a], E.V. Ugryumova[b]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]ogar@brstu.ru, [b]weblab@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0002-0764-2028
Received 2.04.2018, accepted 8.05.2018

The article is the second part of the complex study of contact characteristics in the introduction of spherical asperities of a rigid rough surface into an elastoplastic hardened half-space and in the flattening of spherical asperities of a rough surface by a rigid flat surface. In the first part, the relative contact area was investigated. In the present paper, studies are devoted to the density of gaps in the joint. The properties of the elastoplastic hardening material are described by the power law of Hollomon. To describe the indentation and flattening of single spherical asperity, the results of finite element modeling are used. To determine the relative contact area, a discrete roughness model is used in the form of a set of spherical segments distributed along the height in accordance with the curve of the reference surface. For this, a regularized incomplete beta function is used, which describes the distribution of the material along the entire height of the rough layer. When determining the gap density, the volume of elastic punching outside the contact zone of a single asperity was taken into account. Analytic expressions are obtained for determining the gap density in the joint, depending on the dimensionless load during the introduction and flattening of spherical asperities. The corresponding graphical dependencies for different values of hardening parameters are given. It is indicated that the case of flattening roughness of a rough surface by a rigid flat surface is more conducive to improving the tightness in comparison with the introduction of asperities.

Keywords: rough surface; gap density in joint; spherical asperity; elastoplastic contact; sphere indentation; sphere flattening.

Введение

Уплотнительные соединения находят широкое применение в трубопроводных коммуникациях гидропневматических систем оборудования, аппаратов и агрегатов. Их надежность во многом определяется качеством уплотнительных соединений. Обеспечение надежности уплотнительных соединений закладывается еще на стадии проектирования.

Герметичность уплотнительных соединений обеспечивается нагружением их сжимающим усилием (контактными давлениями герметизации), в значительной мере определяется напряженно-деформированным состоянием в зоне контакта и зависит от контактного взаимодействия шероховатых поверхностей. Основными контактными характеристиками, обеспечивающими герметичность уплотнительных соединений, являются относительная площадь контакта, плотность зазоров в стыке и степень слияния пятен контактов отдельных неровностей, определяющая вероятность протекания среды [1, 2 и др.].

Для количественной оценки герметичности используют скорость утечки — массу или объем среды в единицу времени. Для оценки герметизирующей способности уплотнительного стыка в работах [1, 2] используется безразмерный функционал проницаемости:

$$C_u = \frac{\Lambda^3 \upsilon_k}{4(1-\eta)^2}, \qquad (1)$$

где Λ — плотность зазоров в стыке; η — относительная площадь контакта; υ_k — вероятность протекания среды, которая зависит от слияния отдельных пятен контакта.

Все контактные характеристики, входящие в выражение (1), зависят от параметров микрогеометрии и безразмерного силового упругогеометрического параметра f_q или от $\bar{q}_\sigma = q_c/\sigma_y$ (q_c — контактные давления герметизации; σ_y — предел текучести материала). Здесь и далее используем обозначения, принятые в первой части комплексного исследования [3], в котором авторами проводилось сравнение зависимостей относительных площадей контакта от нагрузки при внедрении и сплющивании сферических неровностей шероховатых поверхностей.

В работе [4] Н.Б. Демкин полагал, что параметры контактного взаимодействия при внедрении сферических неровностей в менее твердую поверхность или при сплющивании сферических неровностей более твердой поверхностью примерно одинаковы. При упругом контакте справедливость такого подхода не вызывает сомнений, но при упругопластическом он не является очевидным и нуждается в дополнительном исследовании [5].

Результаты исследований, проведенных в [3], показали, что при взаимодействии шероховатой поверхности с гладкой при одинаковой нагрузке относительная площадь контакта при сплющивании всегда больше, чем при внедрении. При этом величина отличия зависит от соотношения параметров упрочнения.

Целью настоящей работы является исследование плотности зазоров в стыке (другой контактной характеристики, входящей в выражение (1)) при смятии и внедрении сферических неровностей при контактировании жесткой гладкой поверхности с шероховатой поверхностью и жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством.

В большинстве случаев контакт металлических шероховатых поверхностей является упругопластическим [6], поэтому при определении контактных характеристик следует учитывать параметры упрочняемости материала [1]. Для описания свойств упругопластического упрочняемого материала используем степенной закон Холломона:

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon E, & \varepsilon \le \varepsilon_y, \\ \sigma_y (\varepsilon/\varepsilon_y)^n, & \varepsilon > \varepsilon_y, \end{cases} \qquad (2)$$

где n — экспонента упрочнения; $\varepsilon_y = \sigma_y / E$, E — модуль упругости. Значение экспоненты упрочнения n можно определить по параметрам условной диаграммы растяжения согласно [1].

В работе [3] также указывалось на несостоятельность использования теории контактирования Гринвуда – Вильямсона [7] и Н.Б. Демкина [4] для задач герметологии из-за значительных погрешностей. Поэтому при расчете перечисленных выше контактных характеристик для задач герметологии используется дискретная модель шероховатости в виде набора сферических сегментов, распределение которых по высоте соответствует кривой опорной поверхности шероховатого слоя, для описания которой используется регуляризованная неполная бета-функция [1, 2].

Контактирование отдельной сферической неровности. Вначале приведем основные подходы для описания внедрения жесткой сферической неровности в упругопластическое упрочняемое полупространство, описываемое выражениями (2). В работах [8; 9] для описания внедрения сферы в разных областях упругопластичности одним выражением применяются диаграмма кинетического индентирования и метод подобия деформационных характеристик. Характеристикой сопротивления материала контактной пластической деформации является пластическая твердость [10], которая определена с использованием результатов конечно-элементного моделирования [11, 12].

В работе [8] с целью обобщения результатов исследований зависимости P – h (усилие – перемещение) приведены к виду k – δ, где $k = P/P_y$, $\delta = h/h_y$. Критические усилие P_y и величина внедрения h_y, соответствующие появлению пластической деформации в приповерхностном слое, равны [13]:

$$\bar{h}_y = \frac{h_y}{R} = \left(\frac{\pi}{2} K_y \varepsilon_y\right)^2, \; \bar{P}_y = \frac{P_y}{E^* R^2} = \frac{4}{3} h_y^{\frac{3}{2}}, \qquad (3)$$

где $K_y = 1.613$ для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

Полученные в [9] зависимости k – δ для разных областей упругопластичности представлены в виде:

$$k = B_i(\varepsilon_y, n) \cdot \delta^{\gamma_i(\varepsilon_y, n)}. \qquad (4)$$

Для сравнения контактных характеристик при внедрении и сплющивании неровностей используем результаты конечно-элементного моделирования. Для внедрения сферы радиусом R в работе [12] получено:

$$\bar{P} = \frac{P}{E^* R^2} = e^{-B} \left(\frac{h}{R}\right)^A = e^{-B} \left(\bar{h}\right)^A, \qquad (5)$$

где P_{ep} — приложенное усилие; h — величина внедрения, $A = A(\varepsilon_y, n)$, $B = B(\varepsilon_y, n)$, $\bar{h} = h/R$.

Для определения глубины h_c , по которой происходит контакт сферы с материалом полупространства, следует использовать результаты работы [14]:

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = M^{\frac{2}{N}} \left(2\bar{h}\right)^{\frac{2}{N}-1}, \tag{6}$$

где $M = M(\varepsilon_y, n)$, $N = N(\varepsilon_y, n)u$.

Фактическая площадь контакта при внедрении сферы:

$$A_r = 2\pi R h_c^2 . \tag{7}$$

Сплющивание сферы жесткой плоской поверхностью менее изучено. В основном для этого также используется конечно-элементное моделирование. Для упругого, идеально пластичного материала авторами [15, 16] предложены удобные для практического использования выражения:

$$\frac{P}{P_y} = B_i \left(\frac{h}{h_y}\right)^{\gamma_i}, \quad \frac{A}{A_y} = C_i \left(\frac{h}{h_y}\right)^{\lambda_i}, \tag{8}$$

где B_i , γ_i , C_i , λ_i — константы для разных диапазонов значений h/h_y ; используемые в [16] значения критических P_y и h_y практически совпадают с определяемыми по выражениям (4).

Предложенный подход был развит авторами [17], которые получили аналогичные зависимости для упругопластического упрочняемого материала, описываемого выражениями (1). При изменении экспоненты упрочнения от 0 до 1 свойства материала изменяются от упругих, идеально пластичных до упругих.

Относительное усилие при сплющивании сферы:

$$\bar{P} = \bar{P}_y B_i \left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\gamma_i}, \tag{9}$$

где $B_1 = B_1(n) = -0.07598n + 0.96081$,

$\gamma_1 = \gamma_1(n) = 0.10725n + 1.43352$, для $1 \le \bar{h}/\bar{h}_y \le 6$;

$B_2 = B_2(n) = -0.82815n + 1.68998$,

$\gamma_2 = \gamma_2(n) = 0.31831n + 1.21111$, для $6 \le \bar{h}/\bar{h}_y \le 110$.

Фактическая площадь контакта при сплющивании:

$$A_r = A_y C_i \left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\lambda_i}, \quad A_y = \pi R h_y, \tag{10}$$

где $C_1 = C_1(n) = -0.01763n + 1.13173$,

$\lambda_1 = \lambda_1(n) = 0.04715n + 1.03997$, для $1 \le \bar{h}/\bar{h}_y \le 6$;

$C_2 = C_2(n) = 0.23235n + 0.94066$,

$\lambda_2 = \lambda_2(n) = 0.18325n + 1.14559$, для $6 \le \bar{h}/\bar{h}_y \le 110$.

Выражения (9) и (10) описывают соответствующие характеристики для разных областей упругопластичности и по своему виду аналогичны выражению (5).

В дальнейшем, с целью упрощения сравнения характеристик контакта при внедрении и сплющивании сферы, будем использовать выражения (5), (6), (7) и (9), (10).

Плотность зазоров в уплотнительном стыке. Рассмотрим плотность зазоров при сплющивании сферических неровностей, так как плотность зазоров при внедрении сферических неровностей подробно рассмотрена в работах [1, 2]. Воспользуемся дискретной моделью шероховатости, приведенной в указанных работах.

Общий объем зазоров в уплотнительном стыке:

$$V_c = A_c R_{\max} (1 - K_p - \varepsilon) + V_e , \tag{11}$$

где A_c — контурная площадь; K_p — коэффициент заполнения профиля; ε — перемещение жесткой гладкой поверхности; V_e — увеличение объема зазоров за счет упругого продавливания поверхности вне площадки контакта.

Соответствующая плотность зазоров в стыке:

$$\Lambda = V_c / (A_c R_{\max}) = 1 - K_p - \varepsilon + \Lambda_e . \tag{12}$$

Согласно [1] на площадке контакта радиусом a действует нагрузка вида:

$$p(r) = p_0 \left(1 - r^2/a^2\right)^{\beta}, \tag{13}$$

где $\beta = \gamma_i - 1$, $p_0 = p_m(1+\beta)$, $p_m = P/(\pi a^2)$ — среднее давление на площадке контакта.

Перемещения вне площадки контакта от нагрузки вида (13):

$$u_z(r) = \frac{p_m a}{\pi E} \cdot K_\beta \cdot \frac{{}_2F_1\left(0.5, 0.5; \beta + 2; a^2/r^2\right)}{r/a}, \tag{14}$$

$$K_\beta = 2^{2\beta+1} (\beta + 1) \cdot \mathrm{B}(\beta + 1, \beta + 1) \cdot \mathrm{B}(0.5, \beta + 1.5), \tag{15}$$

где ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса; $\mathrm{B}(a, b)$ — бета-функция.

С учетом выражений (3) и (9) первый сомножитель в (14) представим в виде:

$$\frac{p_m a}{\pi E} = \frac{R^2 \bar{P}_y B_i}{\pi^2 a} \cdot \left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}_y}\right)^{\gamma_i}. \tag{16}$$

Объем упругого продавливания, приходящийся на одну неровность:

$$V_{ei} = 2\pi \int_{a_r}^{a_c} r u_z(r) dr . \tag{17}$$

Подставляя (15) в (18), получим:

$$V_{ei}=\frac{2}{\pi}R^2\bar{P}_y B_i\left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\gamma_i}K_\beta a_c\left[F_e\left(a_r^2/a_c^2\right)-F_e(1)\right], \quad (18)$$

где $F_e(z)={}_2F_1(-0.5,0.5;\gamma_i+1;z)$.

Для используемой модели шероховатой поверхности:

$$R=\frac{a_c^2}{2\omega R_{\max}}, \quad (19)$$

$$\bar{h}=\frac{h}{R}=\frac{(\varepsilon-u)\cdot 2\omega R_{\max}^2}{a_c^2}=\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)\cdot\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^2, \quad (20)$$

$$\frac{a_r^2}{a_c^2}=\left(\frac{a_c}{2\omega R_{\max}}\right)^{2(1-\lambda_i)}C_i\bar{h}_y^{1-\lambda_i}\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^{\lambda_i}. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (18), имеем:

$$V_{ei}=\frac{2}{\pi}\frac{a_c^5K_\beta\bar{P}_y}{(2\omega R_{\max})^2}B_i\left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\gamma_i}\left[F_e\left(a_r^2/a_c^2\right)-F_e(1)\right], \quad (22)$$

Для общего объема зазоров в стыке:

$$V_e=\int_0^\varepsilon V_{ei}(\varepsilon,u)\cdot\frac{A_c}{\pi a_c^2}\cdot\varphi_n'(u)du,$$

$$V_e=\frac{A_cR_{\max}}{2(\pi\omega)^2}\cdot\left(\frac{a_c}{R_{\max}}\right)^3\bar{P}_y\times \\ \times\int_0^\varepsilon K_\beta B_i\left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\gamma_i}\left[F_e\left(a_r^2/a_c^2\right)-F_e(1)\right]\varphi_n'(u)du. \quad (23)$$

Соответствующая плотность зазоров:

$$\Lambda_e=\frac{\bar{P}_y}{2(\pi\omega)^2}\cdot\left(\frac{a_c}{R_{\max}}\right)^3\times \\ \times\int_0^\varepsilon K_\beta B_i\left(\bar{h}/\bar{h}_y\right)^{\gamma_i}\left[F_e\left(a_r^2/a_c^2\right)-F_e(1)\right]\varphi_n'(u)du. \quad (24)$$

Подставляя значение Λ_e в выражение (12), получим зависимость плотности зазоров в стыке Λ от величины ε перемещения жесткой гладкой поверхности. Для получения зависимости $\Lambda-\bar{q}_\sigma$ следует использовать зависимость $\bar{q}_{\sigma2}(\varepsilon)$ из [3]:

$$\bar{q}_{\sigma2}=\bar{q}_{\sigma2}(\varepsilon)=1.5K_yh_y\left(\frac{a_c}{2\omega R_{\max}}\right)^2\times \\ \times\int_0^\varepsilon\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2\gamma_i}\bar{h}_y^{-\gamma_i}B_i\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^{\gamma_i}\varphi_n'(u)du. \quad (25)$$

Затем из зависимостей (24) и (25) исключить параметр ε.

Аналогично определяем плотность зазоров в стыке при внедрении неровностей. При использовании выражения (5) следует учесть, что:

$$\frac{q_ca_c}{\omega R_{\max}E^*}=f_{q1}=\frac{2^{2(A-1)}e^{-B}}{\pi}\left(\frac{\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2A-3}\times \\ \times\int_0^\varepsilon\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^A\varphi_n'(u)du, \quad (26)$$

$$\bar{q}_{\sigma1}=\frac{q_c}{\sigma_y}=\frac{f_{q1}}{f_y}, \quad f_y=\frac{a_c\varepsilon_y}{\omega R_{\max}}.$$

Условие перехода границы области упругопластичности $\bar{h}/\bar{h}_y\le 6$ в выражениях (9) и (10) для отдельной сферической неровности в выражениях (18) и (19) следует представить в виде:

$$\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\le\frac{3}{8}\left(\pi K_yf_y\right)^2. \quad (27)$$

На рисунке 1 представлены зависимости плотности зазоров Λ от относительной нагрузки $\bar{q}_\sigma=q/\sigma_y$ при внедрении жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое упрочняемое полупространство и при сплющивании неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью для разных значений параметров упрочнения ε_y и n. Значения параметров кривой опорной поверхности: $p=3.5$, $q=3.5$.

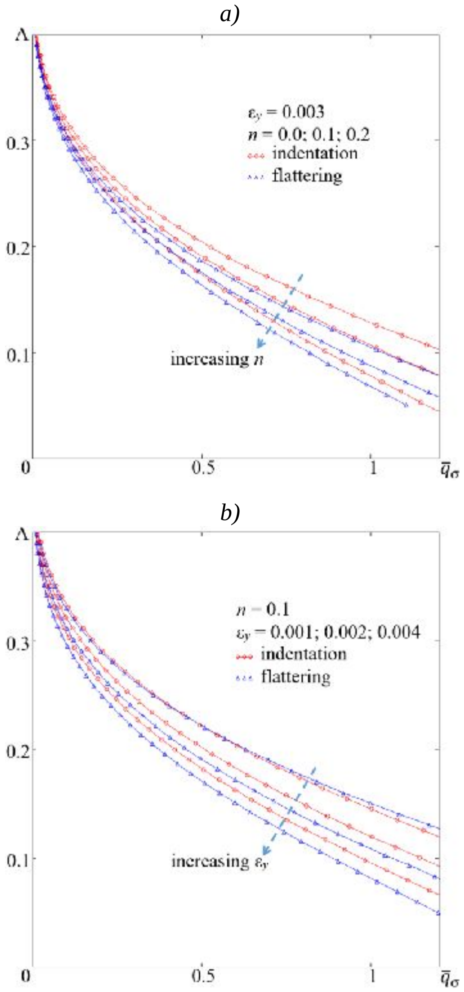

Рис. 1. Зависимости $\Lambda-\bar{q}_\sigma$ для разных значений параметров упрочнения

Заключение

1. При взаимодействии шероховатой поверхности с гладкой, при одинаковой нагрузке, плотность зазоров в стыке при сплющивании неровностей всегда меньше, чем при внедрении неровностей. Из представленных зависимостей исключением является лишь случай при $n = 0.1$ и $\varepsilon_y = 0.001$, когда плотность зазоров при внедрении неровностей незначительно меньше, чем при сплющивании.

2. С увеличением упругих свойств материала (ростом значений экспоненты упрочнения n и параметра ε_y) разница значений плотностей зазоров при сплющивании и внедрении неровностей увеличивается.

3. С точки зрения обеспечения заданной герметичности для разных зон герметизации роль параметров в выражении (1) различна [1]. Для диапазона стабильной герметизации определяющее значение имеет плотность зазоров в стыке, а для зоны эффективной герметизации — вероятность протекания среды, которая уменьшается с увеличением относительной площади контакта.

Исходя из вышесказанного, более способствует улучшению герметичности случай сплющивания неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью.

Литература

1. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
2. Огар П.М, Тарасов В.А. Проектирование затворов специальной трубопроводной арматуры. Братск: Изд-во БрГУ, 2014. 191 с.
3. Огар П.М., Елсуков В.К., Угрюмова Е.В. Относительная площадь контакта при внедрении и сплющивании сферических неровностей шероховатых поверхностей // Системы Методы Технологии. 2018. № 1. С. 32-39.
4. Демкин Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
5. Казанкин В.А.Разработка методики расчета прочности неподвижных соединений с учетом контактнойжесткости сопрягаемых деталей близкой твердости: дис. … канд. техн. наук. Волгоград, 2016. 145 с.
6. Ланков А.А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3-5.
7. Greenwood J.A.,Williamson J.B.R. Contact of nominally flat sufaces // Proc. Roy. Soc. 1966. Vol. A 295. P. 301-313.
8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space. Adv. Mat. Res. 2013. Vol. 664. P. 625-631.
9. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Трибомеханика упругопластического контакта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2. С. 116-122.
10. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 234 с
11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.
12. Collin J. M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. Vol. 31. P. 636-640.
13. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
14. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136–4153.
15. Etision I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an elastic–plastic loaded spherical contact // Int. J. Solids Struct. 2005. Vol. 42. P. 3716–3729.
16. Kogut L., Etision I. Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // ASME J. Appl. Mech. 2002. Vol. 69. P. 657–662.
17. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and anloading of a shtrical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // Int. J. of Mech. Ssiences. 2012. Vol. 56. P. 70-76.

References

1. Ogar P.M., Gorohov D.B., Kozhevnikov A.S.Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.
2. Ogar P.M, Tarasov V.A.Designing gates of special pipeline fittings. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2014. 191 p.
3. Ogar P.M., Elsukov V.K., Ugryumova E.V.The relative contact area by indentation and flattening of rough surfaces spherical asperities //Systems Methods Technologies. 2018. № 1. P. 32-39.
4. Demkin N.B.Contacting rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 227p.
5. Kazankin V.ADevelopment of a technique for calculating the strength of fixed joints, taking into account the contact stiffness of matched parts of close hardness: dis. … kand. tekhn. nauk. Volgograd, 2016. 145p.
6. Lankov A.A. The probability of elastic and plastic deformations during compression of metallic rough surfaces //Friction&Lubrication in Machines and Mechanisms. 2009. № 3. P. 3-5.
7. Greenwood J.A.,Williamson J.B.R. Contact of nominally flat sufaces // Proc. Roy. Soc. 1966. Vol. A 295. P. 301-313.
8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation characteristics of sphere and elastoplastic half-space. Adv. Mat. Res. 2013. application to determine contact Vol. 664. P. 625-631.
9. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V.Tribomechanics of elastoplastic contact //Moderntechnologies. System analysis. 2013. № 2. P. 116-122.
10. Drozd M.S., Matlin M.M., Sidyakin YU.I.Engineering calculations elastic-plastic deformation of the contact. M.: Mashinostroenie, 1986. 234 p
11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.
12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. Vol. 31. P. 636-640.
13. Dzhonson K.Contact Mechanics. M.: Mir, 1989. 510 p.
14. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.
15. Etision I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact // Int. J. Solids Struct. 2005. Vol. 42. P. 3716-3729.
16. Kogut L., Etision I. Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // ASME J. Appl. Mech. 2002. Vol. 69. P. 657-662.
17. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and anloading of a shtrical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // Int. J. of Mech. Ssiences. 2012. Vol. 56. P. 70-76.