# ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6, 629.4.015;02 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-1-7-11

## Оценка динамических реакций связей во взаимодействиях элементов механических колебательных систем: развитие методологических позиций

В.Б. Кашуба[1 a], Р.С. Большаков[2 b], И.С. Ситов[1 c]

[1]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[2]Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
[a]pro_uch@brstu.ru, [b]bolshakov_rs@mail.ru, [c]sitov@yandex.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-6300-3060, [b]https://orcid.org/0000-0002-1187-5932 ,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6785-632X
Статья поступила 20.01.2018, принята 16.02.2018

*Рассматриваются возможности оценки динамических свойств механических колебательных систем через реакции связей, возникающих при взаимодействиях элементов механических колебательных систем. Целью работы является развитие метода построения математических моделей для оценки динамических состояний систем с использованием понятий о динамических реакциях системы. Работа основана на применении методов структурного математического моделирования, в рамках которого механической колебательной системе сопоставляется структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Реализация метода представлена последовательностью структурных преобразований исходной структурной математической модели с выделением объекта, динамическое состояние которого оценивается, и цепи отрицательной обратной связи, охватывающей объект, характеризуемый передаточной функцией интегрирующего звена 2-го порядка. Динамическая реакция при взаимодействиях составляющих элементов определяется как результат произведения динамической жесткости на величину смещения точки контакта. Рассмотрен ряд примеров, отражающих типовые ситуации взаимодействия элементов. Статические компоненты полной реакции связей в точках контактных взаимодействий определяются при условиях, когда частота внешних гармонических воздействий становится равной нулю. Основные результаты исследований представлены в виде обоснования метода математического моделирования и технологий его реализации, которые иллюстрируются соответствующими примерами.*

**Ключевые слова:** динамические реакции связей; математическая модель; структурная схема; передаточная функция; динамическая жесткость; квазипружина.

## Estimation of dynamical responses of ties in interactions of elements of mechanical oscillation systems: development of methodological positions

V.B. Kashuba[1a], R.S. Bolshakov[2b], I.S. Sitov[1c]

[1]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[2]Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia
[a] pro_uch@brstu.ru, [b] bolshakov_rs@mail.ru, [c] sitov@yandex.ru
[a]https://orcid.org/0000-0002-6300-3060, [b]https://orcid.org/0000-0002-1187-5932 ,
[c]https://orcid.org/0000-0001-6785-632X
Received 20.01.2018, accepted 16.02.2018

*Possibilities of estimation of dynamical properties of mechanical oscillation systems are considered through ties responses which arise at interactions of elements in mechanical oscillation systems. The research is aimed at the development of method of mathematical models for estimation the dynamical conditions of systems with using definitions of dynamical responses. The work is based on using the methods of structural mathematical modeling when structural scheme of equivalent in dynamical attitude of automation control system is matched with mechanical oscillation system. Method realization is represented by the sequence of structural transformations of initial structural mathematical modeling with object discharge with estimation of its dynamical condition and negative feedback tie with coverage of the object. The object is characterized by transfer function of integrated link of second order. Dynamical response at interactions of composing elements is identified as the result of product of dynamical stiffness on value of displacement of contact point. Series of examples with typical situation of elements interactions is considered. Statical components of full response of tie in points of contact interactions are identified at conditions when frequency of external harmonical disturbances equals to zero. The results of researches are represented in the form of substantiation of method of mathematical modeling and technologies of its realization with appropriate examples.*

**Key words:** dynamical responses of ties; mathematical model; structural scheme; transfer function; dynamical stiffness; quasispring.

**Введение**

Технологические и транспортные машины часто эксплуатируются в условиях интенсивного динамического нагружения, что предопределяет интерес и необходимость решения задач обеспечения надежности работы основных узлов и агрегатов [1–3]. Динамическое качество оборудования является сложной характеристикой, которая формируется достаточно широким набором показателей, отражающих особенности работы машин, их взаимодействия с рабочей средой и др. Определение параметров и оценка надежности функционирования машин и оборудования требуют учета особенностей динамических взаимодействий узлов и элементов, что связано с определением так называемых динамических реакций [4–6].

Во многих случаях технические объекты при динамических нагружениях рассматриваются на основе расчетных схем в виде механических колебательных систем с несколькими степенями свободы. На предварительном этапе оценок предполагается, что системы обладают линейными свойствами и имеют сосредоточенные параметры. Существенное значение в оценке значений параметров взаимодействия элементов имеет учет особенностей действия внешних и внутренних возмущающих сил и возникающих динамических режимов, что предопределяет возможности развития подходов в рамках таких задач, как вибрационная защита и виброизоляция и др. [7–9]. Определение динамических реакций реализуется методами, чаще всего связанными со спецификой представлений о механизмах и формах их реализации с использованием так называемых кинематических пар (шарниров) [5, 9]. Динамические нагружения механизмов часто приводят к появлению вибраций, которые возникают относительно положений установившегося движения. Для оценки уровня таких вибраций, как уже упоминалось, используются расчетные схемы механизмов и машин в виде механических колебательных систем, что привносит в решение задач оценки динамических реакций свою специфику. Ряд вопросов, отражающих такие подходы, представлен в работах [10, 11].

В предлагаемой статье развивается принцип построения математических моделей на основе идей структурного математического моделирования, учитывающего специфику динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем.

**Основные положения структурного математического моделирования.**

**1.** Основная идея в определении реакции динамической связи между элементами механических колебательных систем при действии внешних гармонических возмущений заключается в возможности представления объекта, динамическое состояние которого оценивается, в виде интегрирующего звена 2-го порядка, охваченного отрицательной обратной связью. В простейшем виде, когда расчетная схема технического объекта рассматривается как система с одной степенью свободы, обратная связь, в физическом смысле, представляет собой обычный упругий элемент (в данном случае — с линейной жесткостью). В свою очередь объект интерпретируется как массоинерционный элемент с передаточной функцией интегрирующего звена 2-го порядка. Динамическая реакция определяется как произведение смещения объекта ($y$) на коэффициент жесткости $k$ упругого элемента (рис. 1*а*, *б*).

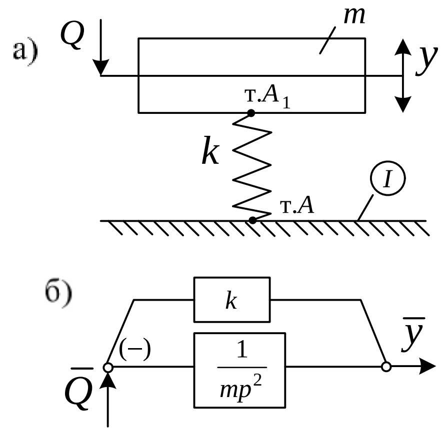



**Рис. 1.** Принципиальная схема технического объекта в виде системы с одной степенью свободы (*а*); структурная математическая модель (*б*)

Передаточная функция системы в соответствии со структурной схемой (рис. 1*б*) имеет вид:

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} = \frac{1}{mp^2 + k}, \qquad (1)$$

где $p = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$) — комплексная переменная; значок <–> над переменной означает ее изображение по Лапласу [10].

Реакции в тт. $A$ и $A_1$ (рис. 1*а*) в линейной постановке будут равны по величине и определяются соответственно выражениями:

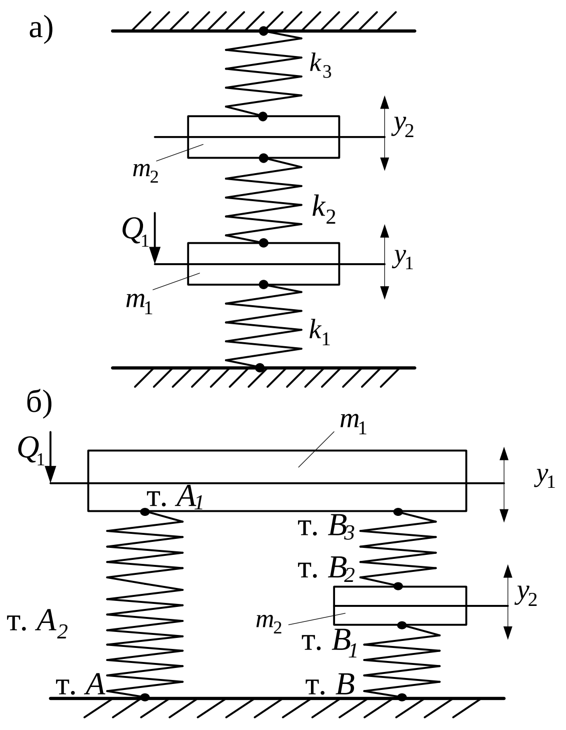
$$\left|\bar{R}_A\right| = \bar{R}_{A1} = k \cdot \bar{y} = \frac{k}{mp^2 + k}. \qquad (2)$$

**2.** Динамическая реакция в тт. $A$ и $A_1$ отражает динамические особенности контактных взаимодействий элементов при действии сил при колебаниях объекта относительно положения статического равновесия, определяемого действием постоянных сил, в первую очередь — сил тяжести элементов, хотя подобного рода воздействия могут иметь и другую физическую природу. Действие статических сил в точках контакта (тт. $A$ и $A_1$) создает статические реакции. Полная реакция в тт. $A$ и $A_1$ формируется как сумма двух составляющих. Особенность рассмотрения динамических взаимодействий в таких подходах заключается в том, что принимается во внимание возможность «обнуления» реакции или проявления ее отрицательных значений. При реализациях контактов в тт. $A$ и $A_1$ при наличии неудерживающих связей в этом случае могут возникать специфические динамические режимы (разрыв связей, подскоки, зазоры). Подходы, связанные с учетом таких обстоятельств, характерны для задач динамики электрических двигателей, имеющих коллекторно-щеточные узлы, что, в частности, нашло отражение в работах [12–14].

Отметим, что определение статических компонент полных реакций в механических колебательных системах также возможно на основе использования методов структурного математического моделирования, однако это требует учета ряда особенностей, возникающих при действии постоянных сил, а не периодических, как это рассматривается при определении динамических реакций.

**3.** Если расчетная схема технического объекта представляет собой механическую колебательную систему с несколькими степенями свободы, то алгоритм определения динамических реакций в точках контакта взаимодействующих элементов будет более сложным и потребует проведения соответствующих преобразований исходной структурной математической модели. Так же, как и в предыдущем случае, для определения динамических реакций необходимо выделение объекта, динамическое состояние которого оценивается (рис. 2 *а–г*). Выделение объекта как основополагающего элемента характерно практически для всех задач динамики, в том числе и для задач вибрационной защиты и виброизоляции [10, 11].

На рис. 2*а* приведена принципиальная схема технического объекта с двумя степенями свободы ($y_1$, $y_2$), представляющего собой линейную механическую колебательную систему с двумя степенями свободы, где элемент массой $m_1$ рассматривается как объект защиты; $m_2$ — промежуточная масса; $k_1$, $k_2$, $k_3$ — коэффициенты жесткости системы.



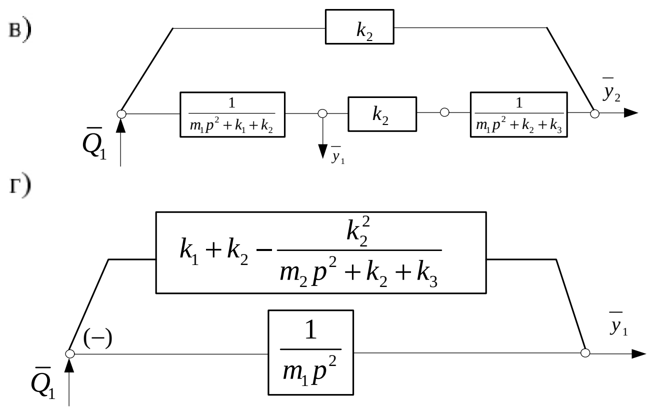




**Рис. 2.** Принципиальная схема технической системы с двумя степенями свободы (*а*); преобразованная принципиальная схема с выделением объекта $m_1$ (*б*); общая структурная математическая модель исходной системы (*в*); структурная схема исходной системы с выделением объекта $m_1$ (*г*)

Вышеприведенное показывает, что путем преобразований система с несколькими степенями свободы может быть преобразована к виду, характерному для системы с одной степенью свободы (рис. 1). Такой подход в [10] определяется как приведение исходной системы к базовой форме. В этом случае передаточная функция цепи обратной связи на рис. 2 *г* определяет жесткость некоторой обобщенной пружины (квазипружины), реализующей цепь обратной отрицательной связи [15]. Исходя из приведенных возможностей преобразований выстраивается соответствующим образом и методика определения динамических реакций в тт. *A*, $A_1$, $B$ – $B_3$.

**Динамические реакции в системе с двумя степенями свободы.**

**1.** При приведении механической колебательной системы с несколькими степенями свободы к виду базовой структуры с выделением объекта, динамическое состояние которого оценивается, упругие свойства системы определяются динамической жесткостью некоторого структурного образования из элементов системы (рис. 2*г*):

$$\bar{k}_{пр}(p) = \frac{m_2 p^2 k_3 + k_2 k_1 + k_3 k_1 + k_3 k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \qquad (3)$$

Динамическая жесткость квазипружины зависит от частоты внешнего воздействия и имеет нулевое значение на частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{k_2 + k_3}. \qquad (4)$$

В этом случае динамические свойства объекта $m_1$ определяются параметрами взаимодействия только внешней силы $\bar{Q}_1$ с учетом того, что передаточные функции системы имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \qquad (5)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A(p)}, \qquad (6)$$

где *A(p)* является частотным характеристическим уравнением:

$$A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \qquad (7)$$

Что касается динамических реакций, то в общем случае динамическая реакция в соответствующих точках определяется как динамическая жесткость квазипружины, умноженная на смещение, определяемое передаточными функциями (5), (6). Более подробная информация о квазипружинах приводится в [15].

**2.** Используя схему на рис. 2*б*, определим, что динамические реакции в тт. $A$, $A_1$ могут быть найдены из выражений:

$$\left|\bar{R}_A\right| = \bar{R}_{A1} = \bar{k}_{np} \cdot \bar{y} = \frac{(m_2 p^2 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3) \cdot \bar{Q}_1}{A(p)}. \qquad (8)$$

Из анализа числителя дробно-рационального выражения (8) следует возможность «обнуления» динамической реакции. При резонансных значениях частот величины динамических реакций будут иметь бесконечно большие значения.

**3.** Динамические реакции в тт. $B_1$ и $B_3$ в общем случае не являются равными:

$$\bar{R}_{B3} = \bar{k}_{B3} \cdot \bar{y}_1 = \frac{(k_3 + m_2 p^2) k_2 \cdot \bar{Q}_1}{A(p)}, \qquad (9)$$

$$\bar{R}_{B1} = \bar{k}_3 \cdot \bar{y}_2 = \frac{k_3 \cdot \bar{Q}_1}{A(p)}. \qquad (10)$$

Здесь:

$$\bar{k}_{B3} = \frac{(k_3 + m_2 p^2) k_2 \cdot}{k_2 + k_3 + m_2 p^2}. \qquad (11)$$

Динамическая реакция в т. $B_3$ (рис. 2) может принимать нулевые значения при частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_3}{m_2}. \qquad (12)$$

При резонансных частотах динамические реакции в тт. $B_1$ и $B_3$ принимают бесконечно большие значения. В случае $m_2 = 0$ и $k_3 = k_1$ динамические реакции в тт. $B_1$ и $B_3$ совпадают. Таким образом, параметры динамических реакций зависят от таких факторов, как структурные особенности системы, величины масс элементов и динамических жесткостей. В работе [11] вводится понятие о передаточной функции динамической реакции, отнесенной к внешнему возмущению, что дает возможность ввести новый вид амплитудно-частотных характеристик, отражающих динамические свойства системы через динамические реакции в точках контактов элементов системы между собой и с опорными поверхностями.

**Статические реакции и их особенности.** Для рассмотренной выше задачи (рис. 2 *а – г*), в которой определялись динамические реакции в тт. $A$, $A_1$, $B$ – $B_3$, учтем действие сил тяжести $P_1$ и $P_2$ и рассмотрим их на основе расчетной схемы, приведенной на рис. 2*а*. В этом случае силы веса будут прикладываться к массоинерционным элементам $m_1$ и $m_2$.

Идея определения статических реакций основана на представлениях о том, что действие постоянных сил на формирование реакций связей можно рассматривать как действие периодических сил при частоте гармонического возмущения, равной нулю.

Вместе с тем необходимо учитывать одновременное действие сил $P_1$ и $P_2$, что предполагает использование принципа суперпозиции.

Передаточные функции системы при действии $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ в соответствии со сделанными предположениями имеют вид:

$$W_1'(p)\Big|_{\bar{P}_1 \neq 0, \bar{P}_2 = 0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{P}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A_1(p)}, \qquad (13)$$

$$W_1''(p)\Big|_{\bar{P}_1 = 0, \bar{P}_2 \neq 0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{P}_2} = \frac{k_2}{A_1(p)}, \qquad (14)$$

$$W_2'(p)\Big|_{\bar{P}_1 \neq 0, \bar{P}_2 = 0} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{P}_1} = \frac{k_2}{A_1(p)}, \qquad (15)$$

$$W_2''(p)\Big|_{\bar{P}_1 = 0, \bar{P}_2 \neq 0} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{P}_2} = \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A_1(p)}, \qquad (16)$$

$$A_1(p) = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3. \qquad (17)$$

С учетом того, что частотное характеристическое уравнение *A(p)* трансформируется при $p = 0$ к (17), запишем статические реакции в тт. $A$, $A_1$, $B_1$ и $B_3$:

$$\left|\bar{R}_{A1\,\text{ст.}}\right| = \left|\bar{R}_{A\,\text{ст.}}\right| = \frac{k_1(k_2 + k_3) P_1 + k_1 k_2 P_2}{A(p)}, \qquad (18)$$

$$\bar{R}_{B3\,\text{ст.}} = \frac{\dfrac{k_3 k_2^2}{k_2 + k_3} P_1 + k_3(k_1 + k_2) P_2}{A_1(p)}, \qquad (19)$$

$$\bar{R}_{B1\,\text{ст.}} = \frac{k_3 k_2^2 P_1 + \dfrac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} P_2}{A_1(p)}. \qquad (20)$$

Статические реакции $\bar{R}_{A\,\text{ст.}}$, $\bar{R}_{A1\,\text{ст.}}$, $\bar{R}_{B3\,\text{ст.}}$, $\bar{R}_{B1\,\text{ст.}}$ из выражений (18) – (20) для определения полной реакции должны быть добавлены к соответствующим динамическим реакциям, определяемым выражениями (8) – (10).

**Заключение**

Механические колебательные системы, используемые в качестве расчетных схем в задачах динамики различных технических объектов, должны учитывать особенности динамических взаимодействий элементов системы. Эти особенности заключаются в том, что элементы системы соединяются между собой, и данные связи реализуются в конкретных конструктивно-технических решениях, таких как определенные шарниры, сочленения и др. Такие соединения не всегда могут обладать двусторонними ограничениями. При определенном уровне динамических воздействий возможны проявления неудерживающих связей, что становится возможным при обнулении полной реакции связей, а также при превышении их динамических составляющих реакций над статическими компонентами. Авторами предлагается метод построения математических моделей для определения динамических реакций, а также статических составляющих реакций при нагружении системы периодическими и постоянными внешними силами. Метод определения реакций построен на основе использования структурных математических моделей, что предполагает построение структурных схем систем и определения передаточных функций.

*Литература*

1. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 374 с.

2. Лонцих П.А., Елисеев С.В. Динамическое качество машин и оборудования как инструмент обеспечения надежности производства и конкурентоспособности процессов. Иркутск: ИрГТУ, 2014. 322 с.

3. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.

4. Теория плоских механизмов и динамика машин / под общ. ред. А.В. Желиговского. М.: Высш. школа, 1961. 336 с.

5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1975. 638 с.

6. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Политехника, 2013. 319 с.

7. Елисеев С.В., Свинин М.М. Математическое и программное обеспечение в исследованиях манипуляционных систем. Новосибирск: Наука, 1992. 294 с.

8. Елисеев С.В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.

9. Смелягин А.И. Структура механизмов и машин. М.: Высш. школа, 2006. 304 с.

10. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.

11. Кашуба В.Б., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Динамические реакции в соединениях элементов механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2016. 331 с.

12. Карасев М.Ф., Беляев В.П., Козлов В.Н., Трушков А.М., Авилов В.Д., Елисеев С.В. Оптимальная коммутация машин переменного тока. М.: Транспорт, 1967. 180 с.

13. Елисеев С.В., Марков К.К. Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неудерживающих связях // Механика и процессы управления: материалы конф. Иркутск, 1971. С. 71-84.

14. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Исследование взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью при наличии силы вязкого трения в модельной задаче с неудерживающими связями // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 1 (37). С. 69-77.

15. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 4 (36). С. 61-70.

*References*

1. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied tasks of the structural theory of vibroprotective systems. SPb.: Politekhnika, 2013. 374 p.

2. Lontsikh P.A., Eliseev S.V. Dynamical quality of machines and equipment as instrument to ensure of reliability of production and competitiveness of processes. Irkutsk: IrGTU, 2014. 322 p.

3. Eliseev A.V., Sel'vinskii V.V., Eliseev S.V. Dynamical of vibration interactions of technological systems elements with accounting of non-holding ties. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.

4. Theory of plane mechanisms and dynamics of machines / pod obshch. red. A.V. Zheligovskogo. M.: Vyssh. shkola, 1961. 336 p.

5. Artobolevskii I.I. Theory of mechanisms and machines. M.: Nauka, 1975. 638 p.

6. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial and elastic ties. SPb.: Politekhnika, 2013. 319 p.

7. Eliseev S.V., Svinin M.M. Mathematical and program provision in researches of multimapulation systems. Novosibirsk: Nauka, 1992. 294 p.

8. Eliseev S.V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. System analysis and mathematical modeling in mechatronics of vibroprotection. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 .

9. Smelyagin A.I. Structure of mechanisms and machines. M.: Vyssh. shkola, 2006. 304 p.

10. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Application theory of oscillations in tasks of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.

11. Kashuba V.B., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. Dynamical responses in connections of elements of mechanical oscillation systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 331 p.

12. Karasev M.F., Belyaev V.P., Kozlov V.N., Trushkov A.M., Avilov V.D., Eliseev S.V. The optimal commutation of alternating current machines. M.: Transport, 1967. 180 p.

13. Eliseev S.V., Markov K.K. Some questions of dynamics of oscillation process at non-holding // Mekhanika i protsessy upravleniya: materialy konf. Irkutsk, 1971. P. 71-84.

14. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Research of interaction of material particle with vibrating surface at availability of viscous friction force in model task in non-holding ties // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 1 (37). P. 69-77.

15. Eliseev S.V., Kovyrshin S.V., Bol'shakov R.S. Features of creature of compacts of elastical elements in mechanical oscillation systems. Interactions with system elements and connection forms // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 4 (36). P. 61-70.