УДК 621.01:621.646 DOI: 10.18324/2077-5415-2018-1-12-17

Относительная площадь контакта при внедрении и сплющивании сферических неровностей шероховатых поверхностей

П.М. Огар[a], В.К. Елсуков[b], Е.В. Угрюмова[c]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]ogar@brstu.ru, [b]elswk@mail.ru, [c]weblab@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0001-6178-1902,
[c]https://orcid.org/0000-0002-0764-2028
Статья поступила 18.12.2017, принята 24.01.2017

В работе указано, что применение моделей шероховатости и теорий контактирования шероховатых поверхностей, разработанных Гринвудом – Вильямсоном и Н.Б. Демкиным для решения задач герметологии, приводит к значительным погрешностям. Это объясняется значительно большими контактными давлениями, чем для задач трибологии, описанием только начальной части кривой опорной поверхности, отсутствием учета пластического выдавливания материала. Приведен краткий обзор методов описания внедрения сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство. Свойства упругопластического упрочняемого материала описываются степенным законом Холломона. Для описания внедрения и сплющивания отдельной сферической микронеровности использованы результаты конечно-элементного моделирования. Рассмотрены случаи контактирования жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством и жесткой гладкой поверхности — с шероховатой поверхностью. Для определения относительной площади контакта использована дискретная модель шероховатости в виде набора сферических сегментов, распределенных по высоте в соответствии с кривой опорной поверхности. Для этого использована регуляризованная неполная бета-функция, описывающая распределение материала по всей высоте шероховатого слоя. Получены аналитические выражения для определения относительной площади контакта в зависимости от безразмерной нагрузки при внедрении и сплющивании сферических неровностей. Приведены соответствующие графические зависимости для разных значений параметров упрочнения.

Ключевые слова: шероховатая поверхность; относительная площадь контакта; сферическая неровность; упругопластический контакт; упрочняемый материал; внедрение сферы; сплющивание сферы.

Relative contact area when penetrating and flattening the spherical asperities of rough surfaces

P.M. Ogar[a], V.K. Elsukov[b], E.V. Ugryumova[c]

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]ogar@brstu.ru, [b]elswk@mail.ru, [c]weblab@brstu.ru
[a]https://orcid.org/0000-0001-7717-9377, [b]https://orcid.org/0000-0001-6178-1902,
[c]https://orcid.org/0000-0002-0764-2028
Received 18.12.2017, accepted 24.01.2017

The paper indicates that the application of roughness models and the theories of contacting rough surfaces developed by Greenwood-Williamson and N.B. Demkin for solving the problems of hermetology leads to significant errors. This is explained by the considerably greater contact pressures than for the tribology problems, the description of only the initial part of the curve of the reference surface, the absence of allowance for the plastic extrusion of the material. A brief review of methods for describing the introduction of a sphere into an elastoplastic reinforced half-space is given. The properties of the elastoplastic reinforced material are described by the power law of Hollomon. To describe the introduction and flattening of individual spherical microroughness, the results of finite element modeling are used. The cases of contacting a rigid rough surface with an elastoplastic half-space and a rigid smooth surface with a rough surface are considered. To determine the relative contact area, a discrete roughness model is used in the form of a set of spherical segments distributed in height in accordance with the curve of the reference surface. For this, a regularized incomplete beta function is used, which describes the distribution of the material along the entire height of the rough layer. Analytic expressions are obtained for determining the relative contact area depending on the dimensionless load during the introduction and flattening of spherical irregularities. The corresponding graphical dependencies for different values of hardening parameters are given.

Keywords: rough surface; relative contact area; spherical unevenness; elastoplastic contact; strengthened material; introduction of the sphere; sphere flattening.

Введение

В настоящее время для решения задач трибологии используются модели шероховатости и теории контактирования шероховатых поверхностей, разработанные Гринвудом – Вильямсоном [1], Н.Б. Демкиным [2] и их последователями. Однако применение таких моделей для решения задач герметологии приводит к значительным погрешностям, что объясняется следующим: 1) контактные давления герметизации примерно на 1–2 порядка выше, чем при трении; 2) в уплотнительном стыке возможно контактирование всех неровностей, что требует описания всей опорной кривой профиля, а не только ее начальной части; 3) не учитывается выдавливание материала в межконтактное пространство при упругопластическом контакте.

Поэтому для описания уплотнительного стыка требуется модель шероховатой поверхности, адекватно описывающая реальную поверхность и соответствующая всей опорной кривой, а не только ее начальной части. Кроме этого, для повышения точности расчета контактных характеристик в дискретной модели шероховатой поверхности должно учитываться реальное распределение размеров микронеровностей.

Герметичность уплотнительных соединений обеспечивается нагружением их уплотнительных поверхностей контактными давлениями и в значительной мере зависит от контактного взаимодействия шероховатых поверхностей, которое характеризуется видом контакта, сближением поверхностей, относительной площадью контакта и плотностью зазоров в стыке [3]. Для герметизации сред с высокими энергетическими параметрами (давлением свыше 40 МПа и температурой свыше 300 ^{o}C) в основном используют металлические материалы.

При расчете перечисленных выше контактных характеристик широкое применение находит дискретная модель шероховатости в виде набора сферических сегментов, распределение которых по высоте соответствует кривой опорной поверхности шероховатого слоя [3], для описания которой используется регуляризованная неполная бета-функция. В большинстве случаев контакт металлических шероховатых поверхностей является упругопластическим [4], поэтому при определении контактных характеристик следует учитывать параметры упрочняемости материала [3]. При этом возможно внедрение сферических неровностей в менее твердую поверхность или сплющивание сферических неровностей более твердой поверхностью. В работе [2] автор полагает, что параметры контактного взаимодействия в указанных случаях примерно одинаковы. При чисто упругой деформации в контакте справедливость такого подхода не вызывает сомнений, но при упругопластической деформации он не является очевидным и нуждается в дополнительном исследовании [5]. В этой связи практический интерес для задач герметологии вызывает сравнение зависимостей относительных площадей контакта от нагрузки при внедрении и сплющивании сферических неровностей шероховатых поверхностей.

Так как контакт двух шероховатых поверхностей можно рассматривать как контакт эквивалентной шероховатой поверхности с гладкой [2], в настоящей работе сравним контакты жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством и жесткой гладкой поверхности — с шероховатой поверхностью. Вначале рассмотрим внедрение и сплющивание отдельных сферических неровностей.

Контактирование отдельной сферической неровности. Анализ методов расчета упругопластической деформации при внедрении сферической неровности подробно рассмотрен в работе [3], где отмечено, что закономерности упругопластического контакта недостаточно изучены, а некоторые предлагаемые решения требуют уточнений и усовершенствований. Одной из важных проблем при этом является учет упрочнения материала и описание эффектов «sink-in – pile-up» (упругого продавливания и пластического вытеснения материала). С ростом приложенной нагрузки различают области ограниченной и развитой упругопластичности [6, 7], однако единого мнения о границах областей не существует. Поэтому представляет определенный интерес описание областей упругопластичности одним выражением.

При описании упругопластического упрочняемого материала широко используется степенной закон Холломона (Hollomon’s power law):

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon E, & \varepsilon \le \varepsilon_y, \\ \sigma_y \left(\varepsilon / \varepsilon_y\right)^n, & \varepsilon > \varepsilon_y, \end{cases} \qquad (1)$$

где n — экспонента упрочнения; $\varepsilon_y = \sigma_y / E$, σ_y — предел текучести; E — модуль упругости.

Значение экспоненты упрочнения n можно определить по параметрам условной диаграммы растяжения согласно [3].

Подход авторов к описанию внедрения сферы в разных областях упругопластичности одним выражением изложен в работах [8; 9]. Суть метода заключается в применении диаграммы кинетического индентирования и метода подобия деформационных характеристик. При этом используется понятие пластической твердости [10] как характеристики сопротивления материала контактной пластической деформации. Пластическая твердость представляется в виде:

$$HD = K_h(\varepsilon_y, n) \cdot \sigma_y, \qquad (2)$$

где $K_h(\varepsilon_y, n)$ — параметр, определенный методом двукратного вдавливания [3] с использованием результатов конечно-элементного анализа внедрения сферы в упругопластическое упрочняемое полупространство [11, 12].

В работе [8] с целью обобщения результатов исследований зависимости $P - h$ (усилие – перемещение) приведены к виду $k - \delta$, где $k = P/P_y$, $\delta = h/h_y$. Критическое усилие P_y и величина внедрения h_y соответствуют появлению пластической деформации в приповерхностном слое. Согласно [13], это происходит при достижении максимального давления в центре площадки контакта величины:

$$p_{\max} = K_y \sigma_y , \quad (3)$$

где $K_y = 1.613$ для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

Тогда при внедрении сферы радиусом R критические усилие P_y и величина внедрения h_y равны:

$$\overline{h}_y = \frac{h_y}{R} = \left(\frac{\pi}{2} K_y \varepsilon_y\right)^2 , \ \overline{P}_y = \frac{P_y}{E^* R^2} = \frac{4}{3} \overline{h}_y^{\frac{3}{2}} , \quad (4)$$

где $\varepsilon_y = \sigma_y / E^*$, E^* — приведенный модуль упругости.

Более простым для расчета контактных характеристик при внедрении сферы радиусом R является выражение из работы [12]:

$$\overline{P}_{ep} = \frac{P_{ep}}{E^* R^2} = e^{-B} \left(\frac{h}{R}\right)^A = e^{-B} \left(\overline{h}\right)^A , \quad (5)$$

где P_{ep} — приложенное усилие; h — величина внедрения; $A = A(\varepsilon_y , n)$; $B = B(\varepsilon_y , n)$; $\overline{h} = h/R$.

Полученные в [9] зависимости $k - \delta$ для разных областей упругопластичности представлены в виде:

$$k = B_i(\varepsilon_y , n) \cdot \delta^{\gamma_i(\varepsilon_y , n)} . \quad (6)$$

Для определения глубины h_c, по которой происходит контакт сферы с материалом полупространства, следует использовать результаты работы [14]:

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = M^{\frac{2}{N}} \left(2\overline{h}\right)^{\frac{2}{N}-1} , \quad (7)$$

где $M = M(\varepsilon_y , n)$; $N = N(\varepsilon_y , n)$.

Фактическая площадь контакта при внедрении:

$$A_r = 2\pi R h c^2 . \quad (8)$$

В ряде работ [15–17] для учета упрочнения материала при упругопластическом контакте использовался эмпирический закон Майера, который устанавливает связь между усилием при вдавливании сферы и диаметром отпечатка. В работах [16, 17] подчеркивается влияние индивидуальных физико-механических свойств реальных материалов на особенности формирования контактных упругопластических деформаций. Однако при этом в явном виде характеристики упругопластического упрочняемого тела не учитываются, что является недостатком данного подхода. Этот недостаток устранен в работах [18, 19], в которых авторы использовали взаимосвязь индекса Майера с экспонентой упрочнения [20, 21]. Полученные зависимости хорошо согласуются с результатами конечно-элементного анализа [12] и с экспериментальными данными [22].

Сплющивание сферы жесткой плоской поверхностью менее изучено. В основном для этого используется конечно-элементное моделирование. Для упругого идеально пластичного материала авторами [23, 24] предложены удобные для практического использования выражения:

$$\frac{P}{P_y} = B_i \left(\frac{h}{h_y}\right)^{\gamma_i} , \ \frac{A}{A_y} = C_i \left(\frac{h}{h_y}\right)^{\lambda_i} , \quad (9)$$

где B_i, γ_i, C_i, λ_i — константы для разных диапазонов значений h/h_y; используемые в [24] значения критических P_y и h_y практически совпадают с определяемыми по выражениям (4).

Предложенный подход был развит авторами [25], которые получили аналогичные зависимости для упругопластического упрочняемого материала, описываемого выражениями (1). При изменении экспоненты упрочнения от 0 до 1 свойства материала изменяются от упругих идеально пластичных до упругих.

Относительное усилие при сплющивании сферы:

$$\overline{P} = \overline{P}_y B_i \left(\overline{h}/\overline{h}_y\right)^{\gamma_i} , \quad (10)$$

где $B_1 = B_1(n) = -0.07598n + 0.96081$,

$\gamma_1 = \gamma_1(n) = 0.10725n + 1.43352$, для $1 \le \overline{h}/\overline{h}_y \le 6$;

$B_2 = B_2(n) = -0.82815n + 1.68998$,

$\gamma_2 = \gamma_2(n) = 0.31831n + 1.21111$, для $6 \le \overline{h}/\overline{h}_y \le 110$.

Фактическая площадь контакта при сплющивании:

$$A_r = A_y C_i \left(\overline{h}/\overline{h}_y\right)^{\lambda_i} , \ A_y = \pi R h_y , \quad (11)$$

где $C_1 = C_1(n) = -0.01763n + 1.13173$,

$\lambda_1 = \lambda_1(n) = 0.04715n + 1.03997$, для $1 \le \overline{h}/\overline{h}_y \le 6$;

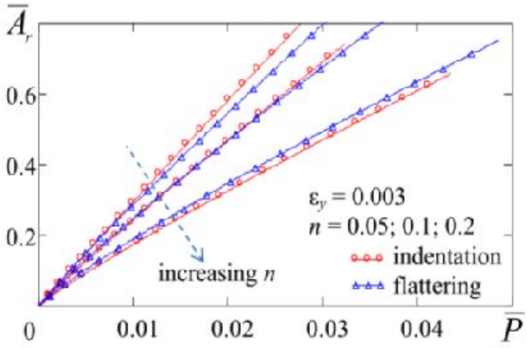
$C_2 = C_2(n) = 0.23235n + 0.94066$,

$\lambda_2 = \lambda_2(n) = 0.18325n + 1.14559$, для $6 \le \overline{h}/\overline{h}_y \le 110$.

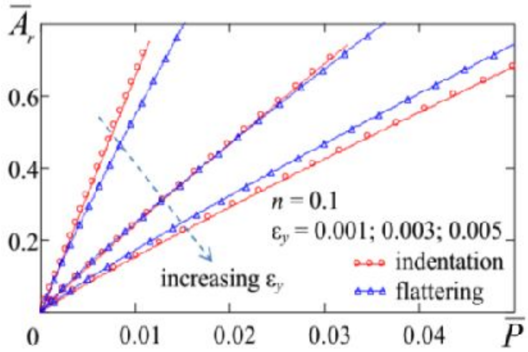
Выражения (10) и (11) описывают соответствующие характеристики для разных областей упругопластичности и по своему виду аналогичны выражению (6).

В дальнейшем, с целью упрощения сравнения характеристик контакта при внедрении и сплющивании сферы, будем использовать выражения (5), (7), (8) и (10), (11).

На рис. 1 представлены зависимости приведенной площади контакта $\overline{A}_r = A_r / \left(\pi R^2\right)$ от относительной нагрузки $\overline{P}$ при внедрении и сплющивании сферы для разных значений параметров упрочнения ε_y и n.



a)



b)

Рис. 1. Зависимости $\overline{A}_r - \overline{P}$ для разных значений параметров упрочнения

Внедрение и сплющивание неровностей шероховатой поверхности. Воспользуемся дискретной моделью шероховатости, приведенной в [3]. Неровности представим в виде набора одинаковых сферических сегментов радиусом $R = a_c^2/(2\omega R_{\max})$, основанием a_c и высотой $\omega R_{\max}$. Для описания кривой опорной поверхности используем регуляризованную неполную бета-функцию:

$$\eta(\varepsilon) = \frac{B_\varepsilon(p,q)}{B(p,q)}, \tag{12}$$

где $B_\varepsilon(p,q)$, $B(p,q)$ — соответственно неполная и полная бета-функции; плотность функции распределения неровностей по высоте описывается выражением:

$$\varphi_n'(u) = \frac{u^{p-2}(1-u)^{q-2}\left[(p-1)(1-u)(q-1)u\right]}{\varepsilon_s^{p-1}(1-\varepsilon_s)^{q-1}}, \tag{13}$$

где p и q — параметры бета-функции, которые определяются высотными параметрами шероховатости; $\varepsilon_s = p/(p+q)$; $\omega = 1-\varepsilon_s$.

При использовании выражений (5), (7), (10) и (11) для i-й неровности шероховатой поверхности следует учитывать, что:

$$h_i = (\varepsilon - u)R_{\max}, \tag{14}$$

$$\frac{h_i}{R} = \frac{(\varepsilon-u)\cdot 2\omega R_{\max}^2}{a_c^2} = \left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)\cdot\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^2, \tag{15}$$

где ε — относительное сближение; u — исходное расстояние до вершины i-й неровности.

Число вершин в слое du:

$$dn_r = n_c\varphi_n'(u)du,\ n_c = \frac{A_c}{\pi a_c^2}. \tag{16}$$

Суммируя усилия и площади по всем неровностям при внедрении шероховатой поверхности, получим:

$$\frac{q_c a_c}{\omega R_{\max} E^*} = f_{q1} = \frac{2^{2(A-1)}e^{-B}}{\pi}\left(\frac{\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2A-3}\times$$
$$\times\int_0^\varepsilon\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^A\varphi_n'(u)du, \tag{17}$$

$$\overline{q}_{\sigma1} = \frac{q_c}{\sigma_y} = \frac{f_{q1}}{f_y},\ f_y = \frac{a_c\varepsilon_y}{\omega R_{\max}};$$

$$\eta_1 = (2M)^{\frac{2}{N}}\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2\left(\frac{2}{N}-1\right)}\times\int_0^\varepsilon\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^{\frac{2}{N}}\varphi_n'(u)du. \tag{18}$$

При сплющивании шероховатой поверхности:

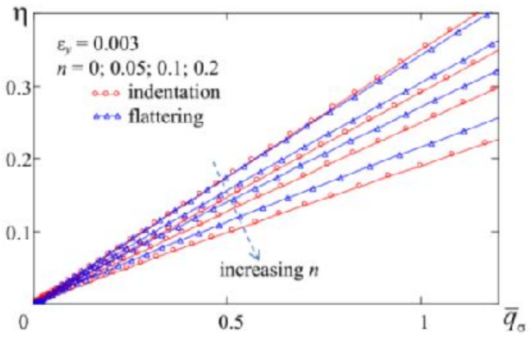
$$\overline{q}_{\sigma2} = 1.5K_y h_y\left(\frac{a_c}{2\omega R_{\max}}\right)^2\times$$
$$\times\int_0^\varepsilon\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2\gamma_i}\overline{h}_y^{-\gamma_i}B_i\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^{\gamma_i}\varphi_n'(u)du; \tag{19}$$

$$\eta_2 = \int_0^\varepsilon\left(\frac{2\omega R_{\max}}{a_c}\right)^{2(\lambda_i-1)}\overline{h}_y^{1-\lambda_i}C_i\left(\frac{\varepsilon-u}{2\omega}\right)^{\lambda_i}\varphi_n'(u)du. \tag{20}$$

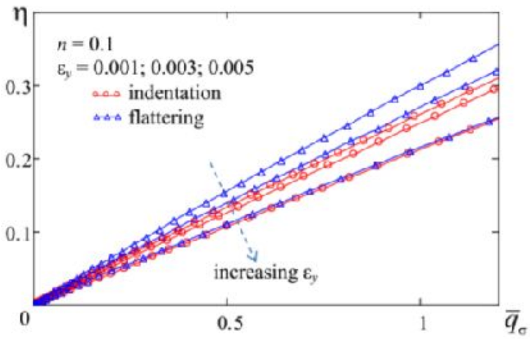
Условие перехода границы области упругопластичности $\overline{h}/\overline{h}_y \le 6$ в выражениях (10) и (11) для отдельной сферической неровности в выражениях (19) и (20) следует представить в виде:

$$\frac{\varepsilon-u}{2\omega} \le \frac{3}{8}(\pi K_y f_y)^2. \tag{21}$$

На рис. 2 представлены зависимости относительной площади контакта η от относительной нагрузки $\overline{q}_\sigma = q/\sigma_y$ при внедрении жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое упрочняемое полупространство и при сплющивании неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью для разных значений параметров упрочнения ε_y и n. Значения параметров кривой опорной поверхности: $p = 3.5$, $q = 3.5$.



a)



b)

Рис. 2. Зависимости $\eta - \overline{q}_\sigma$ для разных значений параметров упрочнения

Заключение

1. Как показано на рис. 1, значения приведенной площади контакта $\overline{A}_r$ при внедрении и сплющивании сферы отличаются незначительно. Причем, в зависимости от сочетания значений параметров упрочнения, приведенная площадь контакта при внедрении может быть больше или меньше, чем при сплющивании. С ростом пластичности материала (уменьшением значений параметров ε_y и n) значения приведенной площади контакта увеличиваются. Более эффективным является уменьшение значения ε_y.

2. При взаимодействии шероховатой поверхности с гладкой при одинаковой нагрузке относительная площадь контакта при сплющивании всегда больше, чем при внедрении. При одинаковых параметрах упрочнения диапазон разброса значений относительной площади контакта значительно меньше аналогичного диапазона разброса значений приведенной площади контакта отдельной неровности.

3. Увеличение относительной площади контакта способствует улучшению герметичности соединений. Однако для оценки эффективности этой контактной характеристики нужен комплексный анализ совместно с другой важной контактной характеристикой — плотностью зазоров в уплотнительном стыке. Такой анализ для внедрения жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое упрочняемое полупространство приведен авторами [3]. Поэтому одной из задач дальнейших исследований авторов будет определение плотности зазоров в стыке при сплющивании неровностей шероховатой поверхности.

4. Важной задачей герметологии является прогнозирование герметичности соединений при возможной разгрузке уплотнительного стыка. Такие исследования проведены для случая внедрения жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое упрочняемое полупространство [26, 27]. Решение аналогичной задачи также планируется для случая сплющивания неровностей шероховатой поверхности жесткой гладкой поверхностью.

Литература

1. Greenwood J.A.,Williamson J.B.R. Contact of nominally flat sufaces // Proc. Roy.Soc. 1966. Vol. A 295. P. 301-313.
2. Демкин Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
3. Огар П.М., Горохов Д.Б., Кожевников А.С. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Братск: Изд-во БрГУ, 2017. 242 с.
4. Огар П.М., Горохов Д.Б., Елсуков В.К. Критерии появления пластических деформаций при контактировании шероховатых поверхностей в соединений технологического оборудования // Системы Методы Технологии. 2017. № 3 (35). С. 32-39.
5. Казанкин В.А. Разработка методики расчета прочности неподвижных соединений с учетом контактной жесткости сопрягаемых деталей близкой твердости: дис. … канд. техн. наук. Волгоград, 2016. 145 с.
6. Ланков А.А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3-5.
7. Воронин Н.А. Теоретическая модель упругопластического деформирования жесткой сферы (Методологические основы оценки механических характеристик компактных однородных материалов методом кинетического индентирования сферического индентора) // Трение и износ. 2003. № 1. С. 16-26.
8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space. Adv. Mat. Res. 2013. Vol. 664. P. 625-631.
9. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Трибомеханика упругопластического контакта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2. С. 116-122.
10. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. М.: Машиностроение, 1986. 234 с.
11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.
12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. Vol. 31. P. 636-640.
13. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
14. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136–4153.
15. Мышкин Н.К., Петроковец М.И. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 368 с.
16. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Исследование упругопластического контакта сферического индентора с металлами и твердосмазочными покры-

тиями. Ч. 1: Критические нагрузки // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 1. С. 5-10.

17. Болотов А.Н., Мешков В.В., Сутягин О.В., Васильев М.В. Исследование упругопластического контакта сферического индентора с металлами и твердосмазочными покрытиями. Ч. 2: Характеристики контактного взаимодействия // Трение и износ. 2013. Т. 34, № 2. С. 165-170.

18. Ogar P., Gorokhov D. Meyer law application to account of material hardening under rigid spherical indentation // Proc. of 22nd int. conf. «MECHANIKA 2017». Kaunas: KUT, 2017. P. 287-290.

19. Ogar P., Gorokhov D., Belokobylsky S. Contact of a single asperity of a rough surface // The elastic-plastic Conferences 2017 // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 129, Sec. 06017. P. 1-3.

20. Булычев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упрочненного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. № 2. С. 43-48.

21. Булычев С.И. Твердость и гистерезис на пределе текучести // Деформация и разрушение материалов. 2011. № 1. С. 41-45.

22. Matlin M., Kazankina E., Kazankin V. Mechanics of unitial contact // Mechanika. 2009. № 2. P. 20-23.

23. Etision I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an elastic–plastic loaded spherical contact // Int. J. Solids Struct. 2005. Vol. 42. P. 3716–3729.

24. Kogut L., Etision I. (2002) Elastic–plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // ASME J. Appl. Mech. 2002. Vol. 69. P. 657–662.

25. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and anloading of a shtrical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // Int. J. of Mech. Ssiences. 2012. Vol. 56. P. 70-76.

References

1. Greenwood J.A., Williamson J.B.R. Contact of nominally flat sufaces // Proc. Roy.Soc. 1966. Vol. A 295. P. 301-313.

2. Demkin N.B. Contacting rough surfaces. M.: Nauka, 1970. 227 p.

3. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Kozhevnikov A.S. Contact tasks in hermetic sealing studies of fixed joints. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2017. 242 p.

4. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Elsukov V.K. Criteria for the appearance of plastic deformations at contacting rough surfaces of joints in technological equipment // Systems Methods Technologies. 2017. № 3 (35). P. 32-39.

5. Kazankin V.A. Development of a technique for calculating the strength of fixed joints, taking into account the contact stiffness of matched parts of close hardness: dis. … kand. tekhn. nauk. Volgograd, 2016. 145 p.

6. Lankov A.A. The probability of elastic and plastic deformations during compression of metallic rough surfaces // Friction&Lubrication in Machines and Mechanisms. 2009. № 3. P. 3-5.

7. Voronin N.A. A theoretical model of elastoplastic penetration of the rigid sphere (Methodological basics of assessment of mechanical characteristics of compact homogenous materials by the method of kinetic indentation with a spherical indentor) // Friction and Wear. 2003. № 1. P. 16-26.

8. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space. Adv. Mat. Res. 2013. Vol. 664. P. 625-631.

9. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Tribomechanics of elastoplastic contact // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 2. P. 116-122.

10. Drozd M.S., Matlin M.M., Sidyakin Yu.I. Engineering calculations elastic-plastic deformation of the contact. M.: Mashinostroenie, 1986. 234 p.

11. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids. 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.

12. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Desing. 2010. Vol. 31. P. 636-640.

13. Dzhonson K. Contact Mechanics. M.: Mir, 1989. 510 p.

14. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., El Abdi R., Mauvoisin G. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

15. Myshkin N.K., Petrokovets M.I. Friction, lubrication, wear. Physical basis and engineering applications of tribology. M.: FIZMATLIT, 2007. 368 p.

16. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of a spherical indenter with metals and solid lubricating coatings: Part 1. Critical loads // Friction and Wear. 2013. T. 34, № 1. P. 5-10.

17. Bolotov A.N., Meshkov V.V., Sutyagin O.V., Vasil'ev M.V. Study of elastoplastic contact of a spherical indenter with metals and solid lubricating coatings: Part 2. Contact characteristics // Friction and Wear. 2013. T. 34, № 2. P. 165-170.

18. Ogar P., Gorokhov D. Meyer law application to account of material hardening under rigid spherical indentation // Proc. of 22nd int. conf. «MECHANIKA 2017». Kaunas: KUT, 2017. P. 287-290.

19. Ogar P., Gorokhov D., Belokobylsky S. Contact of a single asperity of a rough surface // The elastic-plastic Conferences 2017 // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 129, Sec. 06017. P. 1-3.

20. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // Deformation and Fracture of Materials. 2010. № 2. P. 43-48.

21. Bulychev S.I. Hardness and hysteresis at the yield strength // Deformation and Fracture of Materials. 2011. № 1. P. 41-45.

22. Matlin M., Kazankina E., Kazankin V. Mechanics of unitial contact // Mechanika. 2009. № 2. P. 20-23.

23. Etision I., Kligerman Y., Kadin Y. Unloading of an elastic–plastic loaded spherical contact // Int. J. Solids Struct. 2005. Vol. 42. P. 3716-3729.

24. Kogut L., Etision I. (2002) Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat // ASME J. Appl. Mech. 2002. Vol. 69. P. 657-662.

25. Zhao J.H., Nagao S., Zhang Z.I. Loading and anloading of a shtrical contact: From elastic to elastic-perfectly plastic materials // Int. J. of Mech. Ssiences. 2012. Vol. 56. P. 70-76.