

## Новая теория качения на примере описания движения ведущего колеса локомотива (автомобиля)

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия  
kortavik@mail.ru

Статья поступила 2.10.2017, принята 28.10.2017

*Предлагается качественно новая теория качения, основанная на следующих предположениях. Сила трения и момент качения определяются, согласно законам Кулона, только в тех случаях, когда пятно контакта между колесом и полотном дороги (рельсом) полностью занято либо областью сцепления (что соответствует чистому качению), либо областью скольжения (что соответствует чистому скольжению). В других случаях, при одновременном наличии областей сцепления и скольжения, для определения силы трения и момента качения за основу берутся их качественные зависимости от скорости проскальзывания колеса относительно дороги и угловой скорости качения. Приведено обоснование таких зависимостей, которые аналитически задаются через аппроксимацию Паде от кинематических величин. При таком подходе отпадает необходимость в постоянном перерасчете изменяющихся размеров указанных областей и возникающих контактных напряжений, через которые было принято определение сил сопротивления, с использованием методов теории упругости. Новая теория качения хорошо вписывается в общую теорию поликомпонентного трения, хотя Паде аппроксимация здесь задается более общего вида, и основания для ее использования другие. В сравнении с существующими теориями качения проводимые расчеты существенно упрощаются без потери точности для получаемых результатов. Вариант классической теории, когда сила и момент сопротивления качению изменяются в соответствии со скачкообразной характеристикой кулонова трения, будет являться частным случаем новой теории, если допустить, что области сцепления и скольжения неизменны и имеют некоторые усредненные размеры. Для ведущего колеса локомотива (автомобиля) приведены дифференциальные уравнения движения, которые предусматривают случаи чистого качения или скольжения, а также качения с проскальзыванием — возможные режимы, чередующиеся друг с другом в зависимости от действующих сил. Получены кинематические условия, которые определяют текущий режим качения колеса на данный момент времени и тем самым позволяют моделировать процесс движения в соответствии с реальными условиями. Фактически, предложен принципиально новый подход к рассмотрению динамических задач фрикционного контактного взаимодействия, существенно облегчающий нахождение их решений.*

**Ключевые слова:** колесо; теория качения; колесо локомотива; колесо автомобиля; контактное взаимодействие; трение качения; трение скольжения; аппроксимация Паде; поликомпонентная теория трения.

## A new rolling theory based on the description of the motion of the driving wheel of a locomotive (car)

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko, Bratsk, Russia  
kortavik@mail.ru

Received 2.10.2017, accepted 28.10.2017

*Being based on the following assumptions, a qualitatively new rolling theory is proposed. The frictional force and the rolling moment are determined according to the Coulomb laws only when the contact spot between the wheel and the roadway (rail) is fully occupied either by the area of adhesion (which corresponds to pure rolling) or by the sliding area (which corresponds to pure sliding). In other cases, with simultaneous presence of regions of adhesion and sliding, for determining the frictional force and the rolling moment, their qualitative dependences on the wheel slip speed relative to the road and the angular rolling speed are taken as a basis. The basis for such dependences, which are analytically given through the Pade approximation from kinematic magnitudes, is given. With such an approach, there is no need for a constant recalculation of the varying sizes of these regions and the resulting contact stresses, through which the definition of resistance forces was adopted, using the methods of elasticity theory. The new rolling theory fits well with the general theory of polycomponent friction, although the Pade approximation is given here in a more general form, and the reasons for its use are different. In comparison with the existing rolling theories, the calculations carried out are substantially simplified without loss of accuracy for the results obtained. A variant of the classical theory, when the force and moment of rolling resistance change in accordance with the stepwise characteristic of Coulomb friction, will be a special case of the new theory if it is assumed that the regions of adhesion and sliding are unchanged and have some averaged dimensions. For the driving wheel of the locomotive (car), differential equations of motion are given, which provide for cases of pure rolling or sliding, and rolling with slip - possible modes that alternate with each other depending on the acting forces. Kinematic conditions are obtained that determine the current rolling mode of the wheel at a given time and thus allow the simulation of the motion process in accordance with real conditions. In fact, a fundamentally new approach to the consideration of dynamic problems of frictional contact interaction is proposed, which essentially facilitates the finding of problem solutions.*

**Keywords:** wheel; rolling theory; locomotive wheel; car wheel; contact interaction; rolling friction; sliding friction; Pade approximation; polycomponent friction theory.

## Введение

Современные теории движения колеса существуют в двух вариантах. В первом, классическом, наиболее простом и распространенном варианте считается, что сила и момент сопротивления качению изменяются в соответствии со скачкообразной характеристикой кулонова трения. Во втором, более сложном варианте считается, что сила и момент — величины переменные, которые принято определять через возникающие напряжения в пятне контакта колеса и рельса (полотна дороги). Усложненный вариант берется за основу, когда необходима повышенная точность при моделировании движения колеса.

В усложненном варианте все существующие на сегодняшний день теории предполагают определение силы и момента сопротивления качению колеса напрямую, через напряжения, возникающие в пятне контакта. Отличаются они друг от друга главным образом в выборе метода их определения. Сложность такого подхода заключается в том, что необходимо следить за динамикой изменения площади пятна контакта и возникающих напряжений, устанавливая при этом сначала законы их распределения. Решение перечисленных задач весьма трудоемко, даже без учета динамики процесса, и относится к самым сложным аспектам контактного взаимодействия согласно классификации, данной академиком РАН И.Г. Горячевой [1]. Здесь предполагается использование методов теории упругости, сложного программного обеспечения и большого объема численных расчетов на компьютере [2–4]. Обзор решений контактных задач с частичным проскальзыванием, основанных на прямом определении сил сопротивления через возникающие напряжения, приведен в работе [5]. В железнодорожном транспорте при моделировании движения колеса наибольшее распространение получили теории Ж. Картера и Дж. Калкера [6–8] и разработанные на их основе компьютерные программы CONTACT и FASTSIM [9], в автомобильном транспорте — это теории и компьютерные программы, значительная часть которых создана на основе щеточной (*brush*) модели [9–12]. При решении вычислительных задач транспортной динамики часто используются Magic Formula Пасейки [13, 14], фракционный анализ [15, 16]. Теорией движения колеса занимались такие известные отечественные ученые, как М.В. Келдыш, А.Ю. Ишлинский, В.Ф. Журавлев, И.В. Новожилов, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев, М.А. Левин, В.Г. Вильке и др. Тем не менее, существующие теории не столь удобны для проведения теоретических исследований, подразумевают, как это уже отмечалось, большой объем численных расчетов и не обладают универсальностью, что, естественно, не всегда устраивает разработчиков новой техники.

Между тем, знакомство с проблемой — а данная работа о движении колеса у автора первая — вызывает вполне естественный вопрос, почему не предпринимались попытки использовать качественные зависимости от кинематических величин для силы и момента сопротивления качению при их определении? Именно так обычно поступают в подобных задачах механики. На-

пример, определение силы сопротивления со стороны воздушного потока, который воспринимается корпусом автомобиля, можно определять напрямую — через возникающие напряжения, что представляло бы довольно трудоемкую задачу. Вместо этого принято определять силы сопротивления, используя их аналитические зависимости от скорости, что гораздо проще и эффективнее. Во всяком случае, автору ничего не известно о таких работах применительно к колесу. Предварительный анализ говорил о том, что если такие зависимости и существуют, то они не столь очевидны, как это обычно бывает, что, по-видимому, и объясняет вышесказанное. Для их определения понадобился анализ экспериментальных данных о движении колеса, приведенных в доступных работах. Было установлено, что Осборн Рейнольдс в 1876г. одним из первых исследовал контакт упругих тел при качении [17]. Им было выявлено, что область контакта упругих тел при качении разбивается на области скольжения (проскальзывания) и сцепления (схватывания). С возрастанием движущего или тормозящего моментов область проскальзывания увеличивается до тех пор, пока не наступит полное скольжение, а зона сцепления исчезнет. Проскальзывание является одной из причин того, что переносная скорость колеса не равна его окружной скорости. Разница этих двух скоростей называется скоростью крипа. Зависимость крипа от крутящего момента впервые исследовал Картер в 1916 г. [18–20]. Возникающие при этом силы крипа существенным образом зависят от размеров областей скольжения и сцепления, через которые определяются контактные напряжения между колесом и рельсом. Выявленные закономерности впоследствии были подтверждены и другими исследователями [21–24].

**Основные принципы теории.** Для выявления качественных зависимостей для силы и момента сопротивления качению от кинематических величин — скорости проскальзывания и угловой скорости колеса — будем исходить из следующих предположений:

1. Законы Кулона справедливы при определении силы трения и момента качения для случаев чистого скольжения и чистого качения, т. е. когда пятно контакта полностью занято либо областью (зоной) скольжения, либо областью сцепления.

2. Размеры пятна контакта для случая качения с проскальзыванием формируются либо при чистом качении, либо при чистом скольжении — в зависимости от того, что предшествует качению с проскальзыванием.

3. Размеры пятна контакта при качении с проскальзыванием не изменяются, т. е. будем считать, что при таком движении колеса увеличение протяженности области скольжения может происходить только за счет уменьшения области сцепления и наоборот.

4. При качении с проскальзыванием увеличение скорости проскальзывания колеса при неизменной угловой скорости приводит к росту протяженности области скольжения и наоборот — увеличение угловой скорости колеса при неизменной скорости проскальзывания приводит к росту протяженности области сцепления.

5. Сила сопротивления и момент трения качения при качении с проскальзыванием (при наличии в пятне контакта обеих областей — скольжения и сцепления) определяются в зависимости от скорости проскальзывания и угловой скорости качения колеса, т. е. с учетом влияния скольжения на качение колеса и наоборот.

Кроме того, следует иметь в виду следующее. При чистом скольжении псевдоскольжения не наблюдается. Поэтому с ростом скорости скольжения сила трения будет оставаться неизменной, хотя сама зона скольжения, а, значит, и пятно контакта, растут. Перед началом качения зона скольжения достигает определенного размера, что, как показано ниже, будет определяться косвенно, через критическую скорость скольжения. После этого будет начинаться качение с проскальзыванием без изменения общей площади пятна контакта. При чистом качении с ростом угловой скорости качения будет расти зона сцепления (и пятно контакта), сдвинутая в сторону направления качения. Перед началом скольжения теперь уже зона сцепления при достижении критического значения угловой скорости качения достигает определенных размеров, определяя общую площадь пятна контакта при качении с проскальзыванием.

Первые четыре допущения вполне естественны и не вызывают вопросов. Рассмотрим подробнее, что означает последнее, пятое, допущение. Прежде всего отметим, что в силу допущений 2–4 протяженность области сцепления будет расти как при увеличении угловой скорости, так и при уменьшении скорости проскальзывания колеса. Рост протяженности области сцепления будет увеличивать плечо для пары сил, создающих момент трения качения, а, значит, и значение самого момента. Тем самым момент качения должен зависеть прямо пропорционально от угловой скорости качения и обратно пропорционально — от скорости проскальзывания колеса. Кроме того, в силу тех же допущений 2–4 увеличение протяженности области скольжения может происходить как вследствие роста скорости проскальзывания, так и при уменьшении угловой скорости качения колеса. На первый взгляд, если основываться на законе Кулона, изменение протяженности области скольжения не будет влиять на значение силы сопротивления: сила трения не зависит от площади контакта между телами. Но здесь сила сопротивления будет соответствовать не одной силе трения, а сумме действия двух сил — силы трения и силы упругости. Как установлено опытными данными [1, 5–7, 12], зона скольжения будет претерпевать растяжение, что приводит к росту силы упругости, а, значит, и всей силы сопротивления. Перемещения, возникающие в пятне контакта за счет упругих деформаций, получили название псевдоскольжения. Упругие силы, под действием которых это происходит, называются силами крипа. Установлено, что сила крипа растет при увеличении протяженности зоны скольжения [2]. Тем самым, сила крипа, а значит и вся сила сопротивления, должны иметь прямую пропорциональную зависимость от скорости проскальзывания и обратную — от угловой скорости качения колеса.

В новой теории качения существенно то, что динамика изменения протяженностей зон сцепления и

скольжения определяется не напрямую, как это принято делать, а косвенно — через угловую скорость качения колеса  $\dot{\varphi}$  и скорость проскальзывания  $v$ . Здесь точка  $\langle \cdot \rangle$  — это общепринятое сокращенное обозначение производной по времени. С учетом вышесказанного и экспериментальных данных, качественную зависимость силы и момента сопротивления качению от кинематических величин, как оказалось, удобно задавать аналитически через аппроксимацию Паде [25, 28]:

$$\begin{aligned} F_{mp} &= F_0 \frac{v + \Delta}{v + b\varepsilon\dot{\varphi} + \Delta}; & F_0 &= F_{mp}|_{\dot{\varphi}=0}; \\ M_{\kappa} &= M_0 \frac{\varepsilon\dot{\varphi} + \Delta}{\varepsilon\dot{\varphi} + a v + \Delta}; & M_0 &= M_{\kappa}|_{v=0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $b, a, \Delta$  — коэффициенты аппроксимации, определяемые на основании экспериментальных данных и характеризующие свойства дороги (рельса);  $\varepsilon$  — средний радиус пятна контакта между колесом и дорогой;  $F_0, M_0$  — максимальные значения соответственно для силы и момента сопротивления качению, которые равны соответственно силе трения при чистом скольжении и моменту качения при чистом качении. Заметим, что выражения  $\frac{v + \Delta}{v + b\varepsilon\dot{\varphi} + \Delta}$  и  $\frac{\varepsilon\dot{\varphi} + \Delta}{\varepsilon\dot{\varphi} + a v + \Delta}$  фактически опреде-

ляют собой ту часть пятна контакта, которая приходится соответственно на область скольжения и сцепления, и тем самым определяют, какие части от максимумов для силы сопротивления  $F_0$  и момента качения  $M_0$  приходятся на текущий момент для этих силовых компонент. Отметим, что выбранная форма Паде аппроксимации здесь иная в сравнении с тем, какая используется в теории поликомпонентного трения [25–27]. Такой выбор позволяет избегать некорректностей при нулевых значениях скоростей и моделировать процессы с учетом возможности кратковременных остановок в скольжении и качении колеса. Кроме того, и причины ввода Паде аппроксимации здесь другие: они вызваны не результатом анализа интегральных выражений, полученных для силы и момента сопротивления при скольжении тела с вращением через возникающие контактные напряжения, как это делается в теории поликомпонентного трения, а в результате анализа динамики изменения областей сцепления и скольжения при качении. Вышесказанное позволяет в новой теории учитывать динамику процесса не напрямую через возникающие контактные напряжения, а косвенно — через изменения силы и момента сопротивления, а так же изменения размеров областей сцепления и скольжения, которые определяются через кинематические величины. Для сравнения: в теории поликомпонентного трения [25–27] динамика процесса учитывается путем введения эмпирического соотношения, которое задает закон изменения нормальных напряжений в пятне контакта. При этом используется стационарный закон, что не позволяет учитывать изменение момента трения качения во время движения колеса и, кроме того, означает, что приведен-

ные в этой теории формулы для определения коэффициентов аппроксимации Паде не точны.

Таким образом, в новой теории качения колеса предлагается принципиально иной подход по сравнению с вышеперечисленными вариантами теорий — без привлечения методов теории упругости и необходимости постоянного перерасчета размеров зон скольжения и качения и возникающих в этих зонах контактных напряжений. Вместо этого за основу берутся качественные зависимости для силы и момента сопротивления качению от кинематических величин — скорости проскальзывания и угловой скорости качения колеса, а для их аналитического представления используется Паде аппроксимация. Такой подход значительно упрощает проводимые расчеты (предположительно, без потери точности и без использования методов теории упругости). Кроме того, аналитические зависимости для силы и момента сопротивления качению хорошо вписываются в общую теорию поликомпонентного трения. Фактически, предложен принципиально новый метод к рассмотрению динамических задач фрикционного контактного взаимодействия, облегчающий нахождение их решений.

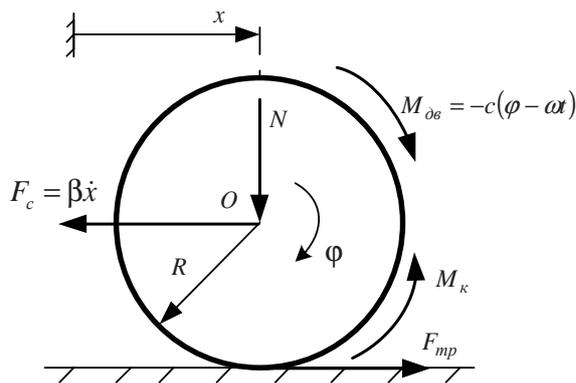


Рис. 1. Качение ведущего колеса локомотива (автомобиля)

**Описание модели.** Для конкретного представления о содержании и возможностях новой теории качения введем новую динамическую модель ведущего колеса локомотива (автомобиля) и опишем ее. Предполагается, что колесо движется на прямолинейном участке дороги, оставаясь при этом в вертикальной плоскости. В качестве обобщенных координат приняты:  $x$  — определяет положение центра колеса;  $\varphi$  — определяет угол поворота колеса вокруг оси, проходящей через центр колеса (направление по часовой стрелке считается положительным). Предполагается, что вал двигателя вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (двигатель неограниченной мощности), и на ось ведущего колеса передается движущий момент  $M_{ог} = -c(\varphi - \omega t)$ , где  $c, t$  — соответственно жесткость упругих связей, посредством которых вращение вала передается на ведущее колесо, и текущее время (рис. 1). Кроме того, будем полагать, что на ось колеса передаются постоянная сила давления  $N$  и сила сопротивления  $F_c = \beta \dot{x}$ , где  $\beta$  — задаваемый коэффициент пропорциональности;

$m, R, J$  — соответственно масса, радиус и осевой момент инерции колеса (предполагается, что  $mg \ll N$ );  $v = R\dot{\varphi} - \dot{x}$  определяет скорость проскальзывания колеса относительно полотна дороги. Принимая во внимание, что угловая скорость  $\dot{\varphi}$  и скорость проскальзывания  $v$  могут менять свой знак во время движения колеса, согласно (1) в дальнейшем будем считать:

$$F_{mp} = F_0 \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\varphi}| + \Delta}; \quad F_0 = F_{mp}|_{\dot{\varphi}=0} = fN; \quad (2)$$

$$M_k = M_0 \frac{\varepsilon|\dot{\varphi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\varphi}| + a|v| + \Delta}; \quad M_0 = M_k|_{v=0} = \rho N,$$

где  $f, \rho$  — коэффициенты соответственно трения и качения, которые определяются согласно закону Кулона:

$$f = f_0 \text{sign } v, \text{ при } v \neq 0; [-f_1, f_1], \text{ при } v \equiv 0; \quad (3)$$

$$\rho = \rho_0 \text{sign } \dot{\varphi}, \text{ при } \dot{\varphi} \neq 0; [-\rho_1, \rho_1], \text{ при } \dot{\varphi} \equiv 0.$$

Считается, что  $\mu_1 = f_1 / f_0 > 1$ ;  $\mu_2 = \rho_1 / \rho_0 > 1$ , т. е. трение-качение покоя не равно трению-качению при движении, и тем самым за основу берется скачкообразный закон Кулона.

1. **В случае чистого качения**, когда  $\dot{\varphi} \neq 0$  и  $v \equiv 0$  ( $\dot{x} \equiv R\dot{\varphi}$ ), должно выполняться:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = fN \frac{1}{k} - \beta\dot{x}, & \text{где } f \in [-f_1, f_1]; \\ J\ddot{\varphi} = -c(\varphi - \omega t) - fNR \frac{1}{k} - \rho_0 N \text{sign } \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $k = 1 + \frac{b\varepsilon}{\Delta}|\dot{\varphi}|$  — коэффициент динамичности, определяющий влияние угловой скорости качения на силу трения. Из записанных уравнений (4) следует уравнение движения колеса для этого режима:

$$(J + mR^2)\ddot{\varphi} = -c(\varphi - \omega t) - \beta R^2\dot{\varphi} - \rho_0 N \text{sign } \dot{\varphi}. \quad (5)$$

Остановка режима чистого качения произойдет тогда, когда одновременно:

$$\dot{\varphi} = 0 \text{ и } c|\varphi - \omega t| \leq \rho_0 N; \quad (6)$$

в противном случае при  $\dot{\varphi} = 0$  и  $c|\varphi - \omega t| > \rho_0 N$  произойдет мгновенная смена направления качения колеса. Кроме того, чистое качение может перейти в качение с проскальзыванием. Условие отсутствия скольжения:

$$|f| \frac{qNR}{k} = c|\varphi - \omega t| - \rho_0 N + \beta R^2(q-1)|\dot{\varphi}|_*,$$

где  $f \in [-f_1, f_1]$ ,  $q = 1 + \frac{J}{mR^2}$ . Проскальзывание начнется тогда, когда:

$$k_* = \frac{f_1 qNR}{c|\varphi - \omega t| - \rho_0 N + \beta R^2(q-1)|\dot{\varphi}|_*}, \quad (7)$$

где  $k_*, |\dot{\phi}|_*$  – критические значения соответственно для коэффициента динамичности и угловой скорости качения, при которой начнется проскальзывание колеса. Тем самым, получаются следующие кинематические условия для режима чистого качения:

- а) при  $0 < |\dot{\phi}| < |\dot{\phi}|_*$  – чистое качение;
- б) при  $|\dot{\phi}| \geq |\dot{\phi}|_*$  – качение с проскальзыванием;
- с) при  $\dot{\phi} = 0$  и  $c|\varphi - \omega t| \leq \rho_0 N$  — остановка чистого качения;
- д) при  $\dot{\phi} = 0$  и  $c|\varphi - \omega t| > \rho_0 N$  — смена направления чистого качения.

2. В случае чистого скольжения, когда  $\dot{\phi} \equiv 0$  и  $v \neq 0$  ( $\dot{x} \equiv v$ ), должно выполняться:

$$m\dot{v} = f_0 N \operatorname{sign} v - \beta v. \quad (8)$$

Остановка чистого скольжения произойдет, согласно уравнению движения (8), когда одновременно:  $v = 0$  и  $f_0 N \operatorname{sign} v \leq 0 \Rightarrow v = 0$  и  $v_- < 0$ , где  $v_-$  — скорость проскальзывания в момент времени  $t = t_* - 0$ , где  $t = t_*$  определяет момент времени, когда  $v = 0$ ; в противном случае, когда  $v = 0$  и  $v_- > 0$ , произойдет лишь мгновенная смена направления проскальзывания.

Чистое скольжение может перейти в режим качения с проскальзыванием. Чтобы установить это, запишем условие отсутствия качения:

$$c|\varphi - \omega t| - N \left( f_0 R + |\rho| \frac{1}{k^\wedge} \right) = 0,$$

где  $\rho \in [-\rho_1, \rho_1]$ . Здесь  $k^\wedge = 1 + \frac{a}{\Delta} |v|$  — коэффициент динамичности, определяющий влияние скорости скольжения на момент трения. Качение может начаться, когда коэффициент динамичности достигнет своего критического значения:

$$k_*^\wedge = \frac{\rho_1 N}{c|\varphi - \omega t| - f_0 NR}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_0 N \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \operatorname{sign} v - \beta \dot{x}; \\ J\ddot{\phi} = -c(\varphi - \omega t) - f_0 NR \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \operatorname{sign} v - \rho_0 N \frac{\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\phi}| + a|v| + \Delta} \operatorname{sign} \dot{\phi}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{J}{R} \dot{v} = -c(\varphi - \omega t) - f_0 qNR \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \operatorname{sign} v - \rho_0 N \frac{\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\phi}| + a|v| + \Delta} \operatorname{sign} \dot{\phi} + \beta \frac{J}{mR} (R\dot{\phi} - v); \\ J\ddot{\phi} = -c(\varphi - \omega t) - f_0 NR \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \operatorname{sign} v - \rho_0 N \frac{\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\phi}| + a|v| + \Delta} \operatorname{sign} \dot{\phi}. \end{cases} \quad (13)$$

Окончание проскальзывания, когда одновременно:

$$v = 0, \quad c|\varphi - \omega t| \leq f_0 qNR \frac{1}{k} + \rho_0 N - \beta \frac{J}{m} \dot{\phi} \Rightarrow$$

причем должно выполняться:  $c|\varphi - \omega t| > f_0 NR$  — необходимое условие для начала качения. Из уравнения (9) значение критической скорости проскальзывания, при которой будет начинаться качение, определится по формуле:

$$|v|_* = \frac{\Delta}{a} \left( \frac{\rho_1 N}{c|\varphi - \omega t| - f_0 NR} - 1 \right), \quad (10)$$

где  $c|\varphi - \omega t| \leq N(\rho_1 + f_0 R)$ , и тем самым:

$$f_0 NR < c|\varphi - \omega t| \leq N(\rho_1 + f_0 R).$$

В итоге, получаются следующие кинематические условия для режима чистого скольжения:

- а) при  $0 < |v| < |v|_*$  – чистое скольжение;
- б) при  $|v| \geq |v|_*$  – качение с проскальзыванием;
- с) при  $v = 0$  и  $v_- < 0$  — остановка чистого скольжения;
- д) при  $v = 0$  и  $v_- > 0$  — смена направления чистого скольжения.

3. Кратковременные остановки колеса, когда  $\dot{\phi} \equiv 0$  и  $v \equiv 0$  ( $\dot{x} \equiv 0$ ):

$$\begin{cases} fN \equiv 0, \quad \text{где } f \in [-f_1, f_1] \Rightarrow f = 0; \\ -c(\varphi - \omega t) - fNR - \rho N \equiv 0, \quad \text{где } \rho \in [-\rho_1, \rho_1] \end{cases} \quad (11)$$

Из уравнений (11) следует, что  $c|\varphi - \omega t| - |\rho|N = 0$ .

Условие начала качения после кратковременной (или длительной) остановки:

$$c|\varphi - \omega t| = \rho_1 N. \quad (12)$$

Очевидно, что после остановки режим чистого скольжения сразу начаться не сможет.

4. Качение с проскальзыванием, когда  $\dot{\phi} \neq 0$  и  $v \neq 0$  ( $v = R\dot{\phi} - \dot{x}$ ), будет описываться следующими дифференциальными уравнениями:

$$v = 0 \text{ и } k \leq \frac{f_0 qNR}{c|\varphi - \omega t| - \rho_0 N + \beta \frac{J}{m} |\dot{\phi}|}. \quad (14)$$

Окончание качения, когда одновременно:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = 0, \quad c|\phi - \omega t| \leq f_0NR + \rho_0N \frac{1}{k^{\wedge}} \Rightarrow \\ \dot{\phi} = 0, \quad k^{\wedge} \leq \frac{\rho_0N}{c|\phi - \omega t| - f_0NR}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полная остановка, когда одновременно:

$$\begin{cases} \dot{\phi} \equiv 0 \text{ и } v \equiv 0, \text{ при } c|\phi - \omega t| < \rho_1N; \\ qmR^2\ddot{\phi} = -c(\phi - \omega t) - \beta R^2\dot{\phi} - \rho_0N \text{sign}\dot{\phi}, \text{ при } v \equiv 0 \text{ и } 0 < |\dot{\phi}| < |\dot{\phi}_*|; \\ m\dot{v} = f_0N \text{sign}v - \beta v, \text{ при } \dot{\phi} \equiv 0 \text{ и } 0 < |v| < |v_*|; \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{при } \dot{\phi} \neq 0 \text{ и } v \neq 0: \\ J\ddot{\phi} = -c(\phi - \omega t) - f_0NR \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \text{sign}v - \rho_0N \frac{\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\phi}| + a|v| + \Delta} \text{sign}\dot{\phi}, \\ \frac{J}{R}\dot{v} = -c(\phi - \omega t) - f_0qNR \frac{|v| + \Delta}{|v| + b\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta} \text{sign}v - \rho_0N \frac{\varepsilon|\dot{\phi}| + \Delta}{\varepsilon|\dot{\phi}| + a|v| + \Delta} \text{sign}\dot{\phi} + \beta \frac{J}{mR} (R\dot{\phi} - v). \end{array} \right. \end{cases} \quad (17)$$

Для последующего анализа полученных уравнений введенной модели ведущего колеса удобнее перейти к безразмерным переменным:

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{J}}t, \quad \xi = \frac{c}{f_0NR}(\phi - \omega t), \quad \eta = \frac{\sqrt{cJ}}{\varepsilon f_0NR}v \quad (18)$$

и безразмерным параметрам:

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{\sqrt{cJ}}{f_0NR}\omega, \quad \delta = \frac{\sqrt{cJ}}{\varepsilon f_0NR}\Delta, \quad q = 1 + \frac{J}{mR^2}, \\ \kappa = \frac{\rho_0}{f_0R}, \quad \alpha = \frac{R}{\varepsilon}, \quad \chi = \frac{\beta}{m}\sqrt{\frac{J}{c}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Кроме того, для последующего будем иметь в виду, что:

$$k = 1 + \frac{b}{\delta}|\xi + \Omega|, \quad k^{\wedge} = 1 + \frac{a}{\delta}|\eta|, \quad (20)$$

и производную по безразмерному времени  $\tau$  будем снова обозначать точкой.

1. **Чистое качение**,  $\xi \neq -\Omega$ ,  $\eta \equiv 0$ :

$$\ddot{\xi} = -\frac{q-1}{q} \left[ \xi + \frac{\chi}{q-1}(\xi + \Omega) + \kappa \text{sign}(\xi + \Omega) \right]. \quad (21)$$

Остановка чистого качения согласно (21), когда одновременно  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $|\xi| \leq \kappa$ ; в противном случае, когда  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $|\xi| > \kappa$ , будет мгновенная смена знака угловой скорости. Условие начала скольжения:

$$k_* = \frac{q\mu_1}{|\xi| - \kappa + \chi|\xi + \Omega|_*}. \quad (22)$$

Кинематические условия в безразмерном виде:

- a) при  $0 < |\xi + \Omega| < |\xi + \Omega|_*$  – чистое качение;
- b) при  $|\xi + \Omega| \geq |\xi + \Omega|_*$  – качение с проскальзыванием;

$$\dot{\phi} = 0, \quad v = 0 \text{ и } c|\phi - \omega t| \leq f_0NR + \rho_0N. \quad (16)$$

Для описания движения ведущего колеса получим в итоге следующую систему дифференциальных уравнений:

- c) при  $\dot{\xi} = -\Omega$  и  $|\xi| \leq \kappa$  — остановка чистого качения;
- d) при  $\dot{\xi} = -\Omega$  и  $|\xi| > \kappa$  — смена направления качения.

2. **Чистое скольжение**,  $\xi \equiv -\Omega$ ,  $\eta \neq 0$ :

$$\dot{\eta} = \alpha(q-1)\text{sign}\eta - \chi\eta. \quad (23)$$

Остановка чистого скольжения, когда  $\eta = 0$ ,  $\eta_- < 0$ .

В противном случае, когда  $\eta = 0$ ,  $\eta_- > 0$ , будет мгновенная смена знака для скорости проскальзывания. Условие начала качения, когда  $k_*^{\wedge} = \frac{\kappa\mu_2}{|\xi| - 1}$ , откуда определяется критическая скорость проскальзывания:

$$|\eta|_* = \frac{a}{\delta} \left( \frac{\mu_2\kappa}{|\xi| - 1} - 1 \right). \quad (24)$$

Кинематические условия в безразмерном виде:

- a) при  $0 < |\eta| < |\eta|_*$  – чистое скольжение;
- b) при  $|\eta| \geq |\eta|_*$  – качение с проскальзыванием;
- c) при  $\eta = 0$  и  $\eta_- < 0$  — остановка чистого скольжения;
- d) при  $\eta = 0$  и  $\eta_- > 0$  — смена направления скольжения.

3. **Кратковременная остановка**, когда:

$$\dot{\xi} \equiv -\Omega, \quad \eta \equiv 0 \text{ и } |\xi| < \mu_2\kappa. \quad (25)$$

Срыв произойдет, когда  $|\xi| = \mu_2\kappa$ , после чего начнется качение.

4. **Качение с проскальзыванием**,  $\xi \neq -\Omega$ ,  $\eta \neq 0$ .

Описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\dot{\xi} - \kappa \frac{|\dot{\xi} + \Omega| + \delta}{|\dot{\xi} + \Omega| + a|\eta| + \delta} \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) - \frac{|\eta| + \delta}{|\eta| + b|\dot{\xi} + \Omega| + \delta} \text{sign}\eta, \\ \dot{\eta} = -\alpha \left[ \dot{\xi} + q \frac{|\eta| + \delta}{|\eta| + b|\dot{\xi} + \Omega| + \delta} \text{sign}\eta + \kappa \frac{|\dot{\xi} + \Omega| + \delta}{|\dot{\xi} + \Omega| + a|\eta| + \delta} \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) \right] + \chi [\alpha(\dot{\xi} + \Omega) - \eta] \end{cases} \quad (26)$$

Окончание качения, когда одновременно:  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $|\xi| \leq \frac{\kappa}{k} + 1$ .

Окончание скольжения, когда одновременно:  $\eta = 0$ ,  $|\xi| \leq \kappa - \frac{q}{k} + \chi|\dot{\xi} + \Omega|$ .

Полная остановка, когда одновременно:  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $\eta = 0$ ,  $|\xi| \leq \kappa + 1$ .

В итоге получим:

$$\begin{cases} \dot{\xi} \equiv -\Omega, \eta \equiv 0, \text{ при } |\xi| < \kappa \mu_2; \\ \ddot{\xi} = -\frac{q-1}{q} \left[ \dot{\xi} + \kappa \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) + \frac{\chi}{q-1} (\dot{\xi} + \Omega) \right], \text{ при } \eta \equiv 0 \text{ и } 0 < |\dot{\xi} + \Omega| < |\dot{\xi} + \Omega|_*; \\ \dot{\eta} = \alpha(q-1) \text{sign}\eta - \chi\eta, \text{ при } \dot{\xi} \equiv -\Omega \text{ и } 0 < |\eta| < |\eta|_*; \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{при } \dot{\xi} \neq -\Omega \text{ и } \eta \neq 0: \\ \ddot{\xi} = -\dot{\xi} - \kappa \frac{|\dot{\xi} + \Omega| + \delta}{|\dot{\xi} + \Omega| + a|\eta| + \delta} \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) - \frac{|\eta| + \delta}{|\eta| + b|\dot{\xi} + \Omega| + \delta} \text{sign}\eta, \\ \dot{\eta} = -\alpha \left[ \dot{\xi} + q \frac{|\eta| + \delta}{|\eta| + b|\dot{\xi} + \Omega| + \delta} \text{sign}\eta + \kappa \frac{|\dot{\xi} + \Omega| + \delta}{|\dot{\xi} + \Omega| + a|\eta| + \delta} \text{sign}(\dot{\xi} + \Omega) \right] + \chi [\alpha(\dot{\xi} + \Omega) - \eta] \end{array} \right. \end{cases} \quad (27)$$

Приведен алгоритм (17), (27) для численного моделирования движения ведущего колеса локомотива (автомобиля), который нетрудно реализовать на компьютере. Здесь это не делалось, так как целью данной работы являлось не решение конкретной задачи, а представление новой теории качения. Приведенная модель использовалась для наглядности такого представления.

### Выводы

1. Предложена новая теория качения колеса, совершенно оригинальная и не похожая на другие. Вместо определения силы сопротивления и момента трения качения напрямую через контактные напряжения здесь это делается косвенным путем. Для их определения используются качественные зависимости от скоростей скольжения и качения, которые аналитически выражаются через аппроксимацию Паде.

2. Новая теория не входит в противоречие с существующими теориями. Так, классическая теория, где сила трения и момент качения определяются в соответствии со скачкообразной характеристикой кулонова трения, будет являться частным случаем новой теории, ее усредненным вариантом.

3. Новая теория не привязана к какой-либо модели колеса — например, щеточной (*brush*) модели, струнной или какой-либо еще. Поэтому теорию можно с одинаковым успехом применять как в железнодорожном транспорте, так и в автомобильном. Здесь следует иметь в виду, что для колес железнодорожного транспорта параметр  $\alpha = R/\epsilon$  должен быть существенно

больше такого же параметра колеса автомобильного транспорта, так как  $\epsilon_{\text{желез}} \ll \epsilon_{\text{авт}}$ .

4. Теория хорошо вписывается и дополняет теорию поликомпонентного трения, предложенную академиком РАН В.Ф. Журавлевым. Существенно, что в новой теории динамика процессов, происходящих в пятне контакта, определяется через кинематические величины, что в частности, позволяет учитывать изменение момента трения качения колеса во время движения — раньше это не удавалось делать. Существенно и то, что часть теории поликомпонентного трения, относящаяся к качению, получила новое качественное обоснование.

5. Введена новая динамическая модель ведущего колеса локомотива (автомобиля).

6. На введенной модели ведущего колеса получены новые качественные результаты, найдены определяющие кинематические условия для определения:

- а) остановки чистого качения или перехода в режим качения с проскальзыванием;
- б) остановки чистого скольжения или перехода в режим качения с проскальзыванием;
- в) остановки качения с проскальзыванием или перехода в режим чистого качения или чистого скольжения;
- г) кратковременной (или длительной) полной остановки и перехода в режим чистого качения.

7. Предложен принципиально новый подход к рассмотрению динамических задач фрикционного контактного взаимодействия, дающий новый инструмент и существенно облегчающий исследование трудоемких задач подобного типа.

В заключение хотелось бы отметить следующее. В существующих источниках [30–32], явно или не явно, всегда подразумевается, что псевдоскольжение и сила крипа в пятне контакта возникают у ведущего колеса при наличии крутящего или тормозного момента. Между тем, по мнению автора, такую же картину можно наблюдать и у ведомого колеса, если к его оси приложена сила в направлении движения. Такая сила должна приводить к появлению тангенциальной силы сопротивления и псевдоскольжения, и силы крипа. В этом случае перечисленное, скорее всего, будет менее заметно: скольжение с проскальзыванием будет проявляться в меньшей степени. Тем не менее, при больших скоростях движения ведомого колеса, например у самолета при посадке, качение с проскальзыванием может проявляться сильно. Это следует иметь в виду при изучении явления шимми [29]. В статье В.Ф. Журавлева [29] в рамках классической теории качения методом осреднения были получены необходимые условия ( $\rho > fR$ ) для возникновения автоколебаний в плоскости ведомого колеса (псевдошимми) при кубической характеристике Кулонова трения. Для сравнения заметим, что применяя новую теорию качения, такой же результат для рассматриваемой модели получается гораздо проще, без использования асимптотических методов. Уточняется и вид движения при автоколебаниях: это не чистое скольжение колеса при его полной блокировке, как это было получено в работе [29] в результате предельного перехода, а чередование качения с проскальзыванием и чистого скольжения. При этом выбор характеристики Кулонова трения – скачкообразной или кубической, не влияет на решение данного вопроса.

Получилась физически ясная теория качения колеса. Благодаря ей, казалось бы, обычная задача о движении ведущего колеса приобрела определенное значение и для практического применения, были получены новые качественные результаты. Классическая теория, к примеру, не позволяет получить аналогичные результаты — что, по-видимому, и объясняет отсутствие интереса к описанию подобных моделей в настоящее время.

Классическая теория качения как более грубая в сравнении с новой теорией описывает движение колеса как бы усреднено, без излишних подробностей, сглаживая их. Об этом говорит, например, то, что в ней никак не учитывается степень проскальзывания колеса относительно полотна дороги — имеется в виду и величина скорости проскальзывания, а не только ее знак. Как следствие, классическая теория не позволяет улавливать некоторые качественные моменты, которые следует принимать во внимание для получения более точных результатов. Так, определение кинематических условий переключения с одного режима движения на другой, что предлагает новая теория, раньше было просто невозможно. Определение текущего режима движения колеса — чистого качения, качения с проскальзыванием, чистого скольжения или кратковременной остановки — все это имеет большое значение при моделировании движения колесных экипажей как в железнодорожном, так и в автомобильном транспорте.

Источником вдохновения при создании новой теории, как это ни странно, послужила моя предыдущая работа над основами математически строгой теории бурения

[33]. Некоторые идеи из создаваемой теории бурения нашли свое продолжение и в данной работе по теории качения колеса. Примечательно, что для таких разных задач вид дифференциальных уравнений похож друг на друга. Поэтому можно прогнозировать, что при численном счете приведенной модели также могут быть обнаружены режимы детерминированного хаоса. Вопрос только в том, будут ли хаотичные режимы отвечать реальным случаям движения колеса или нет.

Можно предположить, что качественное обоснование всей теории поликомпонентного трения, будет аналогично тому, как это было сделано в представленной новой теории качения. По-видимому, при скольжении тела с верчением в пятне контакта тоже будут зоны сцепления и скольжения, с возможностями как псевдоскольжения, так и псевдоверчения, и появления упругой силы и момента. Для подтверждения этого нужны экспериментальные данные.

#### Литература

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 272 с.
3. Ляпушкин Н.Н., Савоськин А.Н. Модель физических процессов в пятне контакта при движении колеса по рельсу со скольжением // Наука и техника транспорта. 2008. № 1. С. 33-42.
4. Голечков Ю.И., Корольков Е.П. О моделях контактного взаимодействия колеса и рельса в динамике транспортных систем // Наука и техника транспорта. 2011. № 3. С. 39-43.
5. Hills D.A. Nowell D. Mechanics of fretting fatigue. Dordrecht etc.: Kluwer, 1994. 236 p.
6. Kalker J.J. Simplified theory of rolling contact // Delft progress report. Series C: Mechanical and aeronautical engineering and shipbuilding. 1973. 1. P. 1-10.
7. Kalker J.J. Survey of wheel-rail rolling contact theory // Vehicle system dynamics. 1979. Vol. 5. P. 317-358.
8. Carter F.W. The electric locomotive // Proc. Inst. Civil Engr. 1916. V.201. P.221-252 (discussion pages 253-289).
9. Кожевников И.Ф. Динамика колес с деформируемой периферией: обзор. М.: Вычисл. центр им. А.А. Дородницына РАН, 2009. С. 53-84.
10. Саркисов П.И., Попов С.Д. Обзор моделей нестационарного качения колеса с упругой шиной по недеформируемому опорному основанию [Электронный ресурс] // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html> (дата обращения: 12.09.2017).
11. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука, 1986. 416 с.
12. Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х. Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью // Сб. науч.-методических ст. М., 2000. Вып. 23. С. 86-95.
13. Pacejka H.B. Lateral Dynamics of Road Vehicles // Vehicle System Dynamics. 1987. Vol. 16. P. 75-120.
14. Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics. SAE.: N SAE0013, 2005. 620 p.
15. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во Мех.-математического ф-та МГУ, 1995.
16. Влахова А.В. Математические модели движения колесных аппаратов. М.: Ижевск, 2014. 148 с. (Сер. Динамические системы и робототехника).

17. Rynolds O. On rolling friction // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1876. Vol. 166 (I). P. 155-174.

18. Carter F.W. The electric locomotive // *Proc. Inst. Civil Engn.* 1916. Vol. 201. P. 221-252.

19. Bakker E., Paceka H.B., Lidner L. A new tyre model with applications in vehicle dynamics studies // *4th Autotechnologies Conference, Monte Carlo 1989, SAE Paper 890087*. P. 83-95.

20. Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. 3rd ed., TU Delft, Elsevier BH, 2002. 642 p.

21. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир, 1989. 510 с.

22. Марков Д.П. Трение и сцепление при взаимодействии колеса с рельсом // *Трение и износ*. 2005. Т. 26, № 3. 2005. С. 229-236.

23. Марков Д.П. Трибология и ее применение на железнодорожном транспорте // *Тр. ВНИИЖТ*. М., 2007. 408 с.

24. Попов В.Л. *Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.

25. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. *Сухое трение в задачах механики*. М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотичная механика»: Ин-т компьютерных исследований, 2010. 164 с.

26. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *Прикладная математика и механика*. 1998. Т. 62, Вып. 5. С. 762-767.

27. Журавлев В.Ф., Киреевков А.А. О разложении Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // *Изв. РАН. МТТ*. 2005. № 2. С. 3-14.

28. Бейкер Дж. (мл.), Грейс-Моррис П. *Аппроксимация Паде*: пер. с англ. М.: Мир, 1986. 502 с.

29. Журавлев В.Ф. О плоских автоколебаниях колеса на консольной подвеске // *Изв. РАН. МТТ*. 2012. № 2. С. 3-8.

30. Андреев А.В. *Передача трением*. М.: Машиностроение, 1978. 176 с.

31. Марюта А.Н. *Фрикционные колебания в механических системах*. М.: Недра, 1993. 240 с.

32. Коган А.Я. Взаимодействие колеса и рельса при качении // *Вестн. ВНИИЖТ*. 2004. № 5. С. 33-40.

33. Коронатов В.А. *Начала построения строгой теории бурения* // *Системы Методы Технологии*. 2016. № 4 (32). С. 83-94.

34.

#### References

1. Goryacheva I.G. *Mechanics of friction interaction*. М.: Nauka, 2001. 478 p.

2. Levin M.A., Fufaev N.A. *Theory of deformable rolling wheels*. М.: Nauka: Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 272 p.

3. Lyapushkin N.N., Savos'kin A.N. A model of physical processes in the contact patch as the wheel on the rail with slide // *Science and Technology in Transport*. 2008. № 1. P. 33-42.

4. Golechkov Yu.I., Korol'kov E.P. About models of contact interaction of wheels and rail in the dynamics of transport systems // *Science and Technology in Transport*. 2011. № 3. P. 39-43.

5. Hills D.A. Nowell D. *Mechanics of fretting fatigue*. Dordrecht etc.: Kluwer, 1994. 236 p.

6. Kalker J.J. *Simplified theory of rolling contact* // *Delft progress report. Series C: Mechanical and aeronautical engineering and shipbuilding*. 1973. 1. P. 1-10.

7. Kalker J.J. *Survey of wheel-rail rolling contact theory* // *Vehicle system dynamics*. 1979. Vol. 5. P. 317-358.

8. Carter F.W. The electric locomotive // *Proc. Inst. Civil Engn.* 1916. V.201. P.221-252 (discussion pages 253-289).

9. Kozhevnikov I.F. *Dynamics of wheels with deformable periphery: obzor*. М.: Vychisl. tsentr im. A.A. Dorodnitsyna RAN, 2009. P. 53-84.

10. Sarkisov P.I., Popov S.D. Review of models of unsteady rolling wheel with an elastic tire according to the rigid reference base [Elektronnyi resurs] // *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2013. Vyp. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/transport/1129.html> (data obrashcheniya: 12.09.2017).

11. Ishlinskii A.Yu. *Applied problems of mechanics*. Book 2. *Mechanics of elastic and absolutely rigid bodies*. М.: Nauka, 1986. 416 p.

12. Novozhilov I.V., Kruchinin P.A., Magomedov M.Kh. *Contact force interaction of wheel with the supporting surface* // *Sb. nauch.-metodicheskikh st. M.*, 2000. Vyp. 23. P. 86-95.

13. Pacejka H.B. *Lateral Dynamics of Road Vehicles* // *Vehicle System Dynamics*. 1987. Vol. 16. P. 75-120.

14. Pacejka H.B. *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE: N SAE0013, 2005. 620 p.

15. Novozhilov I.V. *Fractional analysis*. М.: Izd-vo Mekh.-matematicheskogo f-ta MGU, 1995.

16. Vlahova A.V. *Mathematical model of the motion of wheeled vehicles*. Series - *Dynamic systems and robotics*. М.; Izhevsk, 2014. 148 p. (Ser. Dinamicheskie sistemy i robototekhnika).

17. Rynolds O. On rolling friction // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1876. Vol. 166 (I). P. 155-174.

18. Carter F.W. The electric locomotive // *Proc. Inst. Civil Engn.* 1916. Vol. 201. P. 221-252.

19. Bakker E., Paceka H.B., Lidner L. A new tyre model with applications in vehicle dynamics studies // *4th Autotechnologies Conference, Monte Carlo 1989, SAE Paper 890087*. P. 83-95.

20. Pacejka H.B. *Tyre and Vehicle Dynamics*. 3rd ed., TU Delft, Elsevier BH, 2002. 642 p.

21. Dzhonson K. *Mechanics of contact interaction*. М.: Mir, 1989. 510 p.

22. Markov D.P. Friction and adhesion during the interaction of the wheel and the rail // *Friction and Wear*. 2005. Т. 26, № 3. 2005. P. 229-236.

23. Markov D.P. *Tribology and its application in rail transport* // *Тр. ВНИИЖТ*. М., 2007. P. 408.

24. Попов В.Л. *Contact mechanics and friction physics interaction*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 p.

25. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. *Dry friction in problems of mechanics*. М.; Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaotichnaya mekhanika»: In-t komp'yuternykh issledovaniy, 2010. 164 p.

26. Zhuravlev V.F. On the model of dry friction in the problem of rolling of rigid bodies // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1998. Т. 62, Вып. 5. P. 762-767.

27. Zhuravlev V.F., Kireenkov A.A. On the decomposition of the incidence in the problem of two-dimensional Coulomb friction // *Mechanics of Solids*. 2005. № 2. P. 3-14.

28. Beiker Dzh. (мл.), Greis-Morris P. *Аппроксимация Паде*: пер. с англ. М.: Мир, 1986. 502 p.

29. Zhuravlev V.F. On plane self-excited vibrations of a cantilever suspended wheel // *Mechanics of Solids*. 2012. № 2. P. 3-8.

30. Андреев А.В. *Friction transmission*. М.: Mashinostroenie, 1978. 176 p.

31. Maryuta A.N. *Frictional vibrations in mechanical systems*. М.: Nedra, 1993. 240 p.

32. Коган А.Я. *Interaction of wheel and rail rolling* // *Vestnik VNIIZHT «Vestnik of the Railway Research Institute»*. 2004. № 5. P. 33-40.

33. Koronotov V.A. *The beginning of building a rigorous theory of drilling* // *Systems. Methods. Technologies*. 2016. № 4 (32). P. 83-94.