

2. Doronin S.V., Pokhabov Yu.P., Moskvichev V.V. Expertise of design solutions and technology of designing innovative products of mechanical engineering. Krasnoyarsk: SKTB «Nauka»: KNTs SO RAN, 2011. 72 p.
3. Galiev I.I., Nekhaev V.A., Nikolaev V.A. Methods and means of vibration protection of railway vehicles. M.: Ucheb.-metod. tsentr po obrazovaniyu na zheleznodor. Transporte, 2010. 340 p.
4. Khomenko A.P. Dynamics and control in problems of vibration protection and vibration isolation of moving objects. Irkutsk: IGU, 2000. 293 p.
5. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems. 2-e izd. ispr. i dop. Minsk: Dizain PRO, 2004. 640 p.
6. Kolovskii M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
7. Lenk A. Electromechanical systems. Systems with concentrated parameters. M.: Mir, 1978. 283 p.
8. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamic of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.
9. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronic of vibration protection oscillatory systems. Irkutsk: 2012. 288 p.
10. Vibrations in technique: handbook in 6 v. Vol. 1. Vibrations of linear systems / pod red. V.V. Bolotina. M.: Mashinostroenie, 1978. 352 p.
11. Harris' C.M., Allan G. Shock and Vibration. Handbook. USA. Mc Graw-Hill, New-York, 2002. P. 877.
12. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping: conception of the feedback and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.
13. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects. Irkutsk: IGU, 2008. 523 p.
14. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Upyr' R.Yu., Gozbenko V.E. Lever ties in problems of the dynamic of mechanical oscillatory systems. Theoretical aspects. Irkutsk: Irkut. gos. Un-t putei soobshcheniya, 2009. 158 p. Rus. Dep. v VINITI 27.11.09 № 737 - V 2009.
15. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Joints links in the dynamic of mechanical vibration systems: monogr. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 156 p.
16. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Dynamic of mechanical systems. Lever and the inertial-elastic ties. SPb., 2013. 319 p.
17. Druzhinskii I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroenie, 1977. 238 p.
18. Lur'e A.I. Analytical mechanics. M.: Nauka, 1968. 720 p.

УДК 62.752: 621:534.833: 888.6

DOI: 10.18324/2077-5415-2016-4-28-38

Связность движения элементов и формы внешних воздействий: математические модели взаимодействий в цепных структурах

Н.Ж. Кинаш^{1 a}, В.Б. Кашуба^{2 b}, К.Ч. Выонг^{3 c}

¹Московский инженерный центр ОАО «РЖД», ул. Новорязанская 17, Москва, Россия

²Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

³Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

^an.kinash@icloud.com, ^bnauka@brstu.ru, ^ctrucvq1990@gmail.com

Статья поступила 16.10.2016, принята 21.11.2016

Разработана методологическая основа рассмотрения особенностей колебательных процессов в механических цепных системах с тремя степенями свободы. Предложен метод построения математических моделей для оценки форм совместных движений, вызванных действием нескольких силовых факторов. Показаны возможности появления новых динамических эффектов, отражающих связи между одновременными движениями элементов. Сформулированы понятия о динамических жесткостях фрагментов колебательных систем и возможности их рассмотрения в качестве квазиупругих элементов или квазиупругих. Предложена технология определения параметров динамических взаимодействий элементов на основе использования характеристического частотного уравнения системы. Обозначено развитие методологических позиций в оценке динамических свойств механических колебательных систем с тремя степенями свободы при учете внешних возмущений одновременно по нескольким входам. Продемонстрировано расширение динамических возможностей, связанное с эффектами одновременного действия внешних сил, что изменяет приведенные массоинерционные и упругие характеристики системы. Разработана технология преобразования передаточных функций механических колебательных систем при одновременном действии нескольких возмущений на входы парциальных систем. Предложено понятие обобщенной парциальной системы, которая обладает двумя степенями свободы. Приводятся результаты вычислительного моделирования.

Ключевые слова: структурные математические модели; передаточные функции; динамическая жесткость; форма внешних возмущений; динамическое гашение колебаний.

Movement coherence for external influence elements and forms: mathematical interaction models in chain structures

N.Zh. Kinash^{1 a}, V.B. Kashuba^{2 b}, Q.Ch. Vuong^{3 c}

¹JSC Russian Railways, Moscow Engineering Center; 17 Novoryazanskaya St., Moscow, Russia

²Bratsk State University; 40 Makarenko St., Bratsk, Russia

³Irkutsk State Transport University; 15 Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia

^an.kinash@icloud.com, ^bnauka@brstu.ru, ^ctrucvq1990@gmail.com

Received 16.10.2016, accepted 21.11.2016

Methodological basis has been developed for studying the features of oscillatory processes in mechanical chain systems with three degrees of freedom. Method has been proposed for constructing mathematical models to assess forms of joint movements, caused by the action of several forced factors. Possibilities for new dynamic effects, reflecting the link between the simultaneous movements of the elements have been shown. Notions have been formulated for dynamic stiffness of fragments of oscillatory systems, as well as possibilities for them being studied as quasi-elastic elements or quasi-springs. Technology has been proposed for determining the parameters of the dynamic interactions of elements based on the use of the characteristic frequency equation of the system equation. Methodological positions have been demonstrated in assessing the dynamic properties of mechanical oscillation systems with three degrees of freedom while taking into account external excitations simultaneously via multiple inputs. Expansion has been shown for the dynamic possibilities associated with the effects of the simultaneous action of external forces that changes the given mass-inertial and elastic characteristics of the system. Conversion technology of transfer functions of mechanical oscillation systems on the simultaneous action of several disturbances on input of partial systems has been developed. Notion of a generalized partial system that has two degrees of freedom has been proposed. Results have been presented for computational modeling.

Key words: structural mathematical models; transfer functions; dynamic stiffness; form of external disturbances; dynamic vibration damping.

Введение

Механические колебательные системы цепного типа с двумя и более степенями свободы широко используются как расчетные схемы в различных задачах динамики машин, в том числе вибрационной защиты оборудования, управления динамическим состоянием технологических машин и транспортных средств [1–4].

Для оценки динамических свойств механических систем разработаны достаточно эффективные подходы, опирающиеся на аналитические методы [5–7], а также на их структурные интерпретации, отражающие особенности динамических взаимодействий элементов систем при введении дополнительных связей [8–10].

При всем разнообразии методов исследования и разработок, позволяющих оценивать возможности сложных систем, сохраняются тенденции поиска и использования упрощенных подходов [11–14]. В этом плане большой интерес представляют цепные механические системы как модельные объекты для изучения возможностей оценки динамических эффектов при сложных групповых формах внешних воздействий.

Связность движений элементов систем характерна для многих технологических машин, реализующих технологические процессы вибрационного транспортирования, виброупрочнения и др., что нашло отражение в ряде работ [1; 2; 9; 10], посвященных динамике вибрационных станков. Вместе с тем подобного рода вопросы возникают при оценке свойств и параметров свободных колебаний систем, в задачах модального анализа и синтеза [15].

В предлагаемой статье развиваются методологические позиции в оценке динамических свойств механических колебательных систем с тремя степенями сво-

боды при учете внешних возбуждений одновременно по нескольким входам.

Некоторые общие положения. Постановка задачи исследования. Многие задачи динамики машин решаются на основе использования расчетных схем в виде цепной системы с тремя степенями свободы. Подобные системы имеют три парциальных блока, которые определяют возможности проявления таких режимов, как динамическое гашение колебаний [8]. Вместе с тем для систем характерны и движения, в которых реализуются определенные формы совместных взаимодействий по нескольким координатам. Что касается внешних возмущений, то они, как правило, соотносятся с одним из массоинерционных элементов системы. К примеру, при решении задач вибрационной защиты выделяется один из массоинерционных элементов как объект защиты, а внешняя сила рассматривается как сосредоточенная сила, приложенная к объекту. Вместе с тем силовые внешние воздействия в системах с несколькими степенями могут быть приложены и одновременно по нескольким координатам. Такие ситуации возникают при силовых возмущениях, но могут также формироваться и при кинематических воздействиях, когда система связана с опорными поверхностями в нескольких точках. Предполагается, что движение опорной поверхности является гармоническим.

1. На рис. 1 а в качестве расчетной схемы виброзащитной системы (ВЗС) рассматривается механическая колебательная система с тремя степенями свободы. Система совершает малые колебания относительно положения устойчивого равновесия под действием гармонических сил Q_1, Q_2, Q_3 , приложенных к массоин-

нерционными элементами m_1, m_2, m_3 . Механическая цепь формируется с помощью соединительных элементов — пружин с жесткостями k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 . Для описания движений используется система координат y_1, y_2, y_3 , связанная с неподвижным базисом. Для составления математической модели применяются известные подходы, основанные на использовании методов струк-

турного математического моделирования [1]. На рис. 1 б, в представлены обобщенная и детализированная структурные схемы системы, которые дают детализированные представления о связях между элементами и определения необходимых передаточных функций системы. В системе (рис. 1 а) используется замыкающая упругая связь в виде пружины k_5 .

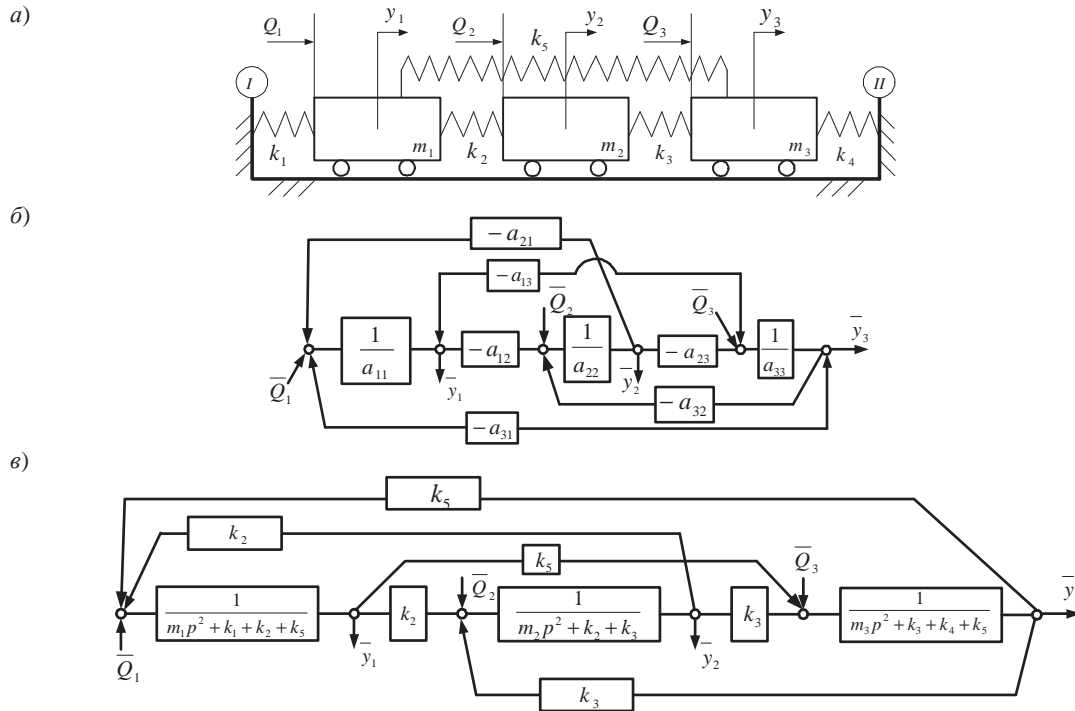


Рис. 1. Расчетная (а), обобщенная структурная (б) и детализированная (в) схемы механической колебательной системы с тремя степенями свободы ($p = j\omega$ — комплексная переменная; значок « \leftarrow » означает изображение по Лапласу [1; 8])

2. Математическая модель в обычном виде представляет собой, как это следует из описания, систему трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В табл. 1 приведены соответствующие коэффициенты уравнений в координатах y_1, y_2, y_3 в операторной форме.

Таблица 1

Система коэффициентов уравнений движения в координатах y_1, y_2, y_3

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$m_1 p^2 + k_1 + k_2 + k_5$	$-k_2$	$-k_5$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$-k_2$	$m_2 p^2 + k_2 + k_3$	$-k_3$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$-k_5$	$-k_3$	$m_3 p^2 + k_3 + k_4 + k_5$
Q_1	Q_2	Q_3

В табл. 1 a_{11}, a_{22}, a_{33} определяют свойства парциальных систем; a_{12}, a_{23}, a_{13} соответственно определяют упругие межпарциальные связи. Внешние силы Q_1, Q_2, Q_3 полагаются равными, что вполне реализуемо практически, с помощью специальных механизмов или управляемых систем. Вопрос об одновременном дейст-

вии нескольких внешних сил обычно решается на основе методов суперпозиции, что учитывает возможные фазовые сдвиги и различия амплитуд. В данном случае все силы являются идентичными.

Задача исследования заключается в оценке возможностей проявления новых динамических эффектов в совместных движениях элементов системы и определении условий их возникновения.

Оценка динамических свойств

1. Используя структурную схему системы (рис. 1 б), можно записать в операторном виде соотношения между действующими силами $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$ и координатами $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$:

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{Q}_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \bar{Q}_2(a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12}) + \bar{Q}_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{A_0}, \quad (1)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{Q}_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \bar{Q}_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + \bar{Q}_3(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{A_0}, \quad (2)$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\bar{Q}_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \bar{Q}_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + \bar{Q}_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{A_0}, \quad (3)$$

где
$$A_0 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} - a_{22}a_{13}a_{31} + 2a_{13}a_{21}a_{32}. \quad (4)$$

На основе (4) при $A_0 = 0$ может быть получено характеристическое уравнение (система обладает симметричными свойствами: $a_{12} = a_{21}$; $a_{13} = a_{31}$; $a_{23} = a_{32}$). При использовании (1) – (3) определяются передаточные функции системы при силовых внешних воздействиях при условии, что $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$. В данном случае передаточные функции системы (рис. 1 а) имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12} - a_{13}a_{22} + a_{32}(a_{13} + a_{12} - a_{23})}{A_0}, \quad (5)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{11}a_{23} - a_{21}a_{33} + a_{31}(a_{23} + a_{21} - a_{13})}{A_0}, \quad (6)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{Q} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32} + a_{12}(a_{32} + a_{31} - a_{21})}{A_0}. \quad (7)$$

Числители передаточных функций (5) – (7), как это следует из табл. 1, представляют собой биквадратные полиномы.

Что касается знаменателя выражений (5) – (7), то во всех случаях он является одинаковым полиномом третьего порядка относительно (ω^2) .

Из анализа числителей выражений (5) – (7) следует, что в общем случае по каждой координате возможны проявления двух режимов динамического гашения. При этом в каждом случае система имеет три частоты собственных колебаний.

2. В частном случае, когда межпарциальная связь $a_{13} = a_{31} = k_5 = 0$, выражения для передаточных функций (5) – (7) могут быть приведены к виду:

$$W'_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12} + a_{32}(a_{12} - a_{23})}{A_0}, \quad (8)$$

$$W'_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{11}a_{23} - a_{21}a_{33}}{A_0}, \quad (9)$$

$$W'_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{Q} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{11}a_{32} + a_{12}(a_{32} - a_{21})}{A_0}, \quad (10)$$

где
$$A_0 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{33}a_{12}^2 \quad (11)$$

— характеристическое уравнение системы (рис. 1) при $k_5 = 0$.

Особенности динамических свойств систем при нескольких согласованных внешних силовых воздействиях. Из выражения (8), используя числитель, найдем уравнение, определяющее возможности проявления режимов динамического гашения:

$$(m_2 p^2 + k_2 + k_3)(m_3 p^2 + k_3 + k_4) + k_2(m_3 p^2 + k_3 + k_4) - k_3(k_3 - k_2) = 0$$

или:

$$m_2 m_3 p^4 + p^2[m_2(k_3 + k_4) + m_3(k_2 + k_3) + k_2 m_3] + (k_2 + k_3)(k_3 + k_4) - k_3^2 + k_3 k_2 = 0. \quad (12)$$

После подстановки $p = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$) из полученного биквадратного уравнения можно получить две частоты динамического гашения — $\omega'_{1\text{дин}}$ и $\omega''_{1\text{дин}}$.

1. Если в системе действует только одна сила $Q_1 = Q$, а $Q_2 = 0$ и $Q_3 = 0$, то частота динамического гашения будет из частотного уравнения другого вида:

$$m_2 m_3 p^4 + p^2[m_2(k_3 + k_4) + m_3(k_2 + k_3)] + (k_2 + k_3)(k_3 + k_4) - k_3^2 = 0. \quad (13)$$

Сравнение (12) и (13) показывает, что частоты динамического гашения колебаний будут различными.

В физическом смысле различие частот динамического гашения объясняется тем, что возмущение от сил Q_2 и Q_3 эквивалентно изменениям упругих свойств системы.

2. Аналогичная ситуация может наблюдаться по координате y_2 . Так, для случая одновременного действия $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ числитель передаточной функции (9) можно представить в виде:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_3 p^2 + k_3 + k_4) + k_3(m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2(m_3 p^2 + k_3 + k_4) = 0 \quad (14)$$

или:

$$m_1 m_3 p^4 + p^2[m_1(k_3 + k_4) + m_3(k_1 + k_2) + k_3 m_1 + k_2 m_3] + (k_1 + k_2)(k_3 + k_4) + k_3(k_1 + k_2) + k_2(k_3 + k_4) = 0. \quad (15)$$

3. Если бы внешние воздействия были одиночными, то есть выполнялось условие $Q_2 = Q$, а $Q_1 = 0$ и $Q_3 = 0$, то частотное уравнение числителя передаточной функции (9) имело бы вид:

$$m_1 m_3 p^4 + p^2[m_1(k_3 + k_4) + m_3(k_1 + k_2)] + (k_1 + k_2)(k_3 + k_4) = 0. \quad (16)$$

Для этого случая частоты динамического гашения определяются достаточно просто:

$$\omega'^2_{2\text{дин}} = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad (17)$$

$$\omega''^2_{2\text{дин}} = \frac{k_3 + k_4}{m_3}. \quad (18)$$

4. Для случая движения по координате y_3 соответственно получим:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_3(m_1 p^2 + k_1 + k_2) - k_2(k_2 - k_3) = 0 \quad (19)$$

или:

$$m_1 m_2 p^4 + p^2 [m_1 (k_2 + k_3) + m_2 (k_1 + k_2) + k_3 m_1] + (k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_2^2 + k_3(k_1 + k_2) + k_2 k_3 = 0. \quad (20)$$

5. Во всех рассмотренных случаях частотное характеристическое уравнение системы, то есть знаменатели передаточных функций (8) – (10), будут одинаковыми и определяются выражением (11).

Числители передаточных функций (8) – (10) представляют собой биквадратные полиномы, в структурах которых дополнительные внешние возмущения нашли отражение в изменениях как массоинерционных свойств системы, так и в изменениях ее упругих характеристик. По существу, одновременное действие нескольких сил сводится к процедурам приведения дополнительных факторов воздействия к выбранной координате приведения (y_1, y_2 или y_3).

Если числители (8) – (10) принять равными нулю и определить соответствующие частоты, то будут найдены частоты динамического гашения колебаний. В описанных случаях выражения (8) – (10) могут рассматриваться как динамические податливости. Равенство нулю динамической податливости соответствует нулевым параметрам смещения по выбранной координате. Одновременно можно интерпретировать такой результат как проявление равенства динамической жесткости бесконечности [9].

В свою очередь, динамическая податливость системы в точке приложения внешнего возбуждения связана с понятием динамической жесткости. Эти понятия находятся в соотношениях инверсии. Определение динамической жесткости, как показано в работе [9], может быть построено на детализации представлений о характеристическом уравнении.

Метод оценки форм совместных движений элементов

1. Если внешнее воздействие Q связано с массоинерционным элементом m_1 , то передаточные функции (1) – (3) принимают вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}{A_0}; \quad (21)$$

($Q_2=0, Q_3=0$)

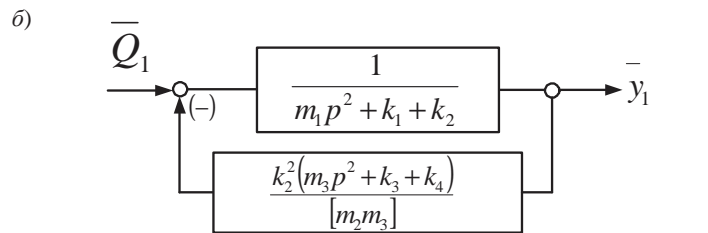
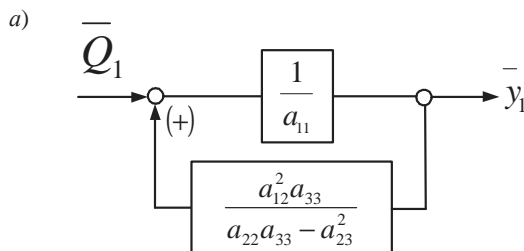


Рис. 2. Структурные схемы для варианта действия возмущающей силы Q_1 , приложенной к элементу m_1 : *a* — обобщенный вид; *б* — детализированный вид

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} = \frac{-a_{21} a_{33}}{A_0}; \quad (22)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_3}{Q_1} = \frac{a_{12} a_{23}}{A_0}. \quad (23)$$

2. Для случая $Q_2 \neq 0$ ($Q_1 = 0, Q_3 = 0$) получим следующие выражения:

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_2} = \frac{a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}}{A_0}; \quad (24)$$

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_2} = \frac{a_{11} a_{33}}{A_0}; \quad (25)$$

$$W_3'(p) = \frac{\bar{y}_3}{Q_2} = \frac{-a_{11} a_{32}}{A_0}. \quad (26)$$

Выражения (21) – (26) для передаточных функций могут быть также получены на основе преобразований структурной схемы (рис. 1 б).

3. В случае действия силы Q_3 на элемент m_3 ($Q_2 = 0, Q_1 = 0$) соответственно можно получить:

$$W_1''(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_3} = \frac{a_{21} a_{32}}{A_0}; \quad (27)$$

$$W_2''(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_3} = \frac{-a_{11} a_{32}}{A_0}; \quad (28)$$

$$W_3''(p) = \frac{\bar{y}_3}{Q_3} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{A_0}. \quad (29)$$

4. Для исследований характеристического частотного уравнения (11), учитывая, что возмущение Q_1 будет приложено к элементу m_1 , проведем некоторые преобразования и получим (11) в виде:

$$a_{11} - \frac{a_{33} a_{21}^2}{[m_2 m_3]} = 0, \quad (30)$$

где

$$[m_2 m_3] = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 = [m_2 p^2 + k_2 + k_3] \times [m_3 p^2 + k_3 + k_4] - k_3^2. \quad (31)$$

Структурная схема системы (рис. 1 б) в этом случае трансформируется, как представлено на рис. 2 а, б.

Для придания решаемым задачам прикладного содержания будем полагать, что массоинерционный элемент m_1 рассматривается как объект защиты от вибрационных внешних возмущений. На структурной схеме (рис. 2 а) объекту защиты будет соответствовать звено с передаточной функцией:

$$W_{об.}(p) = \frac{1}{a_{11}}. \quad (32)$$

Относительно объекта защиты как основного элемента структурной модели могут быть сформированы цепи обратной связи. Эти цепи отражают силовые воздействия на объект защиты со стороны системы или динамические реакции в целом при взаимодействиях элементов, вызванных приложением к объекту силы \bar{Q}_1 .

Элемент с передаточной функцией (32) может быть представлен в форме:

$$W'_{об.}(p) = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}. \quad (33)$$

В этом случае в рассмотрение вводится парциальная система. Очевидно, что объект защиты, т. е. его свойства, определяются в соответствующей части параметрами парциальной системы.

5. На рис. 2 б исходная структурная схема (рис. 2 а) представлена в детализированном виде, что позволяет интерпретировать по отношению к объекту вибразащиты, что обратные цепи на структурной схеме (рис. 2 б) отражают действие обобщенных пружин (или квазипружин).

При такой постановке задачи дополнительные обратные цепи, возникающие при преобразованиях исходных систем (рис. 1 б, в) привносят обратные отрицательные связи. При этом передаточная функция цепи обратной связи, в физическом смысле, соответствует динамической жесткости квазипружины. В данном случае в структурной математической модели системы (рис. 2 а) может рассматриваться одна квазипружина, как показано на рис. 2 б.

На структурных математических моделях (рис. 2 а, б) показано, что исходная система (рис. 1 б) может быть преобразована и условно приведена к системе с одной степенью свободы. В таком случае имеет смысл выделять базовую систему ($a_{11} = m_1 p^2 + k_1 + k_2$), как это показано на рис. 2 б. Базовая система является парциальной системой, в которой имеются связи с опорной поверхностью (k_1) и массоинерционным элементом m_1 .

В такой интерпретации определенные части системы (рис. 2 а) могут быть представлены в виде квазипружин с динамическими жесткостями:

$$\bar{k}_{пр.1}(p) = \frac{k_2^2 [(m_3 p^2 + k_3 + k_4) k_2]}{[m_2 m_3]}. \quad (34)$$

С учетом (34) характеристическое частотное уравнение (30) примет вид:

$$m_1 p^2 + k_1 + k_2 - \bar{k}_{пр.1} = 0. \quad (35)$$

Физический смысл характеристического уравнения (30) в форме (35) заключается в том, что сумма динамических жесткостей элементов и фрагментов исходной системы (рис. 1 а), приведенных к точке приложения силы Q_1 , равняется нулю. Отметим также еще одну возможность интерпретации. Поскольку преобразования (30), по существу, связаны с исключением координат y_2 и y_3 , то умножение (35) на y_1 позволяет сделать заключение о том, что в точке приведения (точка приложения силы Q_1) сумма всех действующих на систему сил, включая силы реакции связей, будет равна нулю. Последнее отражает проявление действия принципа Даламбера.

Построение математических моделей.

1. Таким образом, при $k_5 = 0$ исходная система (рис. 1 а – в) превращается из замкнутой в цепную систему, что позволяет ввести в рассмотрение понятие «обобщенная парциальная система». Такая система образуется при остановке движения по координате y_1 . Обобщенная парциальная система приведена на рис. 3 в виде принципиальной схемы механической колебательной системы (а) и ее структурного аналога (б).

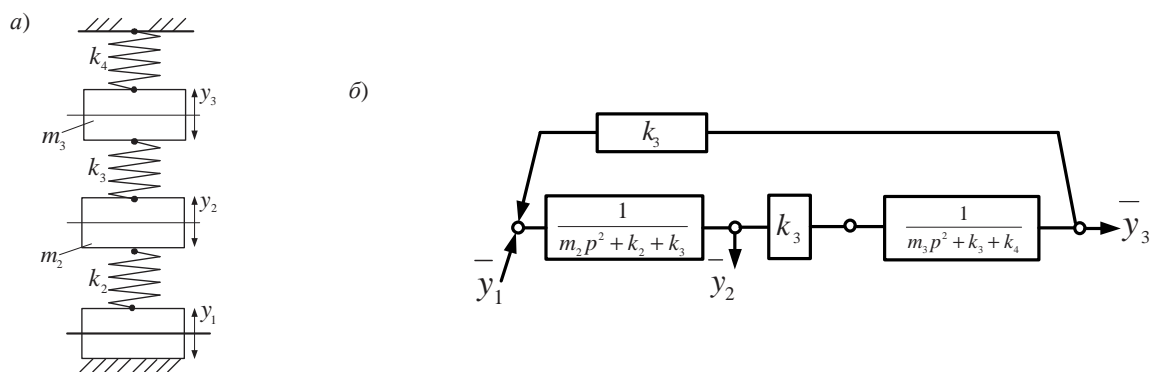


Рис. 3. Принципиальная (а) и структурная (б) схемы обобщенной парциальной системы

Обобщенная парциальная система представляет собой цепную механическую колебательную систему с кинематическим возмущением (рис. 3 а) в виде y_1 ; в этом случае:

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(m_3 p^2 + k_3 + k_4) \cdot k_2}{[m_2 m_3]}. \quad (36)$$

$$W_2''(p) = \frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_1} = \frac{k_2 k_3}{[m_2 m_3]}. \quad (37)$$

Парциальная система (рис. 3 а), рассматриваемая отдельно, имеет две частоты «собственных» колебаний, определяемых из уравнения $[m_2 m_3] = 0$. Обозначим эти частоты через n'_2 и n'_3 . Обычная парциальная система при $a_{11} = 0$ имеет парциальную частоту:

$$n_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}. \quad (38)$$

Аналогично для других парциальных систем в обычной форме:

$$n_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k_3}{m_2}}. \quad (39)$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{k_3 + k_4}{m_3}}. \quad (40)$$

Запишем характеристическое уравнение системы «в целом» при $k_5 = 0$, используя выражение (35) для динамической жесткости $k_{\text{пр.1}}(p)$, поскольку квазипружина имеет непосредственный контакт с массоинерционным элементом m_1 :

$$m_1 p^2 + k_1 + k_2 - k_{\text{пр.1}} = m_1 p^2 + k_1 + k_2 - \frac{k_2^2 (m_3 p^2 + k_3 + k_4)}{[m_2 m_3]}. \quad (41)$$

Из (41) следует, что:

$$\begin{aligned} & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 = \\ & = \frac{k_2 (k_3 + k_4 - m_3 \omega^2)}{(k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) \cdot (k_3 + k_4 - m_3 \omega^2) - k_3^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Уравнение (42) может быть решено графоаналитическим методом в соответствии со схемой пересечения двух графиков:

$$D(\omega) = k_1 + k_2 - m_1 \omega^2; \quad (43)$$

$$D_1(\omega) = k_{\text{пр.2}}(\omega). \quad (44)$$

Отметим при этом, что из $[m_2 m_3] = 0$ могут быть найдены частоты n'_2 , n'_3 , при которых значения $k_{\text{пр.1}}(\omega)$ будут принимать бесконечно большие значения; на этих частотах динамическая жесткость $D_1(\omega)$ квазипружины становится бесконечно большой, что соответствует частотам, определяющим режимы динамического гашения колебаний для массы m_1 . В частности, это следует из выражения (1) при $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$.

При пересечении $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$ определяются частоты собственных колебаний исходной системы (рис. 1 а).

2. Если при силовом внешнем возмущении Q_1 рассматривать движение по координатам y_2 и y_3 , то связи между координатами y_2 , y_3 и y_1 характеризуются передаточными функциями (36) и (37); такие передаточные функции можно было бы назвать, учитывая предыдущие разработки, «передаточными функциями межпарциальных связей».

Для взаимодействия элементов системы характерно, что в связях $y_1 - y_3$ возможен режим динамического гашения на частоте:

$$n_{1\text{дин.}}^2 = \frac{k_3 + k_4}{m_3}. \quad (45)$$

Частоты динамического гашения для случая, когда Q_1 приложено к массе m_1 , определяются из частотного уравнения (30). Такие значения соответствуют значениям собственных частот обобщенной парциальной системы с двумя степенями свободы.

При возбуждении колебаний в цепных системах с тремя степенями свободы вид амплитудно-частотных характеристик существенно зависит от выбора места приложения силы; отличаются и частотные характеристики по отдельным координатам. На рис. 4 а — в представлено семейство амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) при силовом возмущении Q_1 , приложенном к массе m_1 (при $k_5 = 0$).

3. Характерным для семейства АЧХ является уменьшение числа режимов динамического гашения при переходе к координатам y_2 и y_3 соответственно, а также появление режимов, для которых характерны графики АЧХ с формированием зон уменьшения колебаний массоинерционных элементов до минимума; при этом движение по координатам происходит без изменения знака. Специфическая особенность колебаний механических систем для сравнения достаточно подробно рассмотрена в [16].

Отношения амплитуд колебаний, определяемых передаточными функциями (36), (37), представлены на рис. 5.

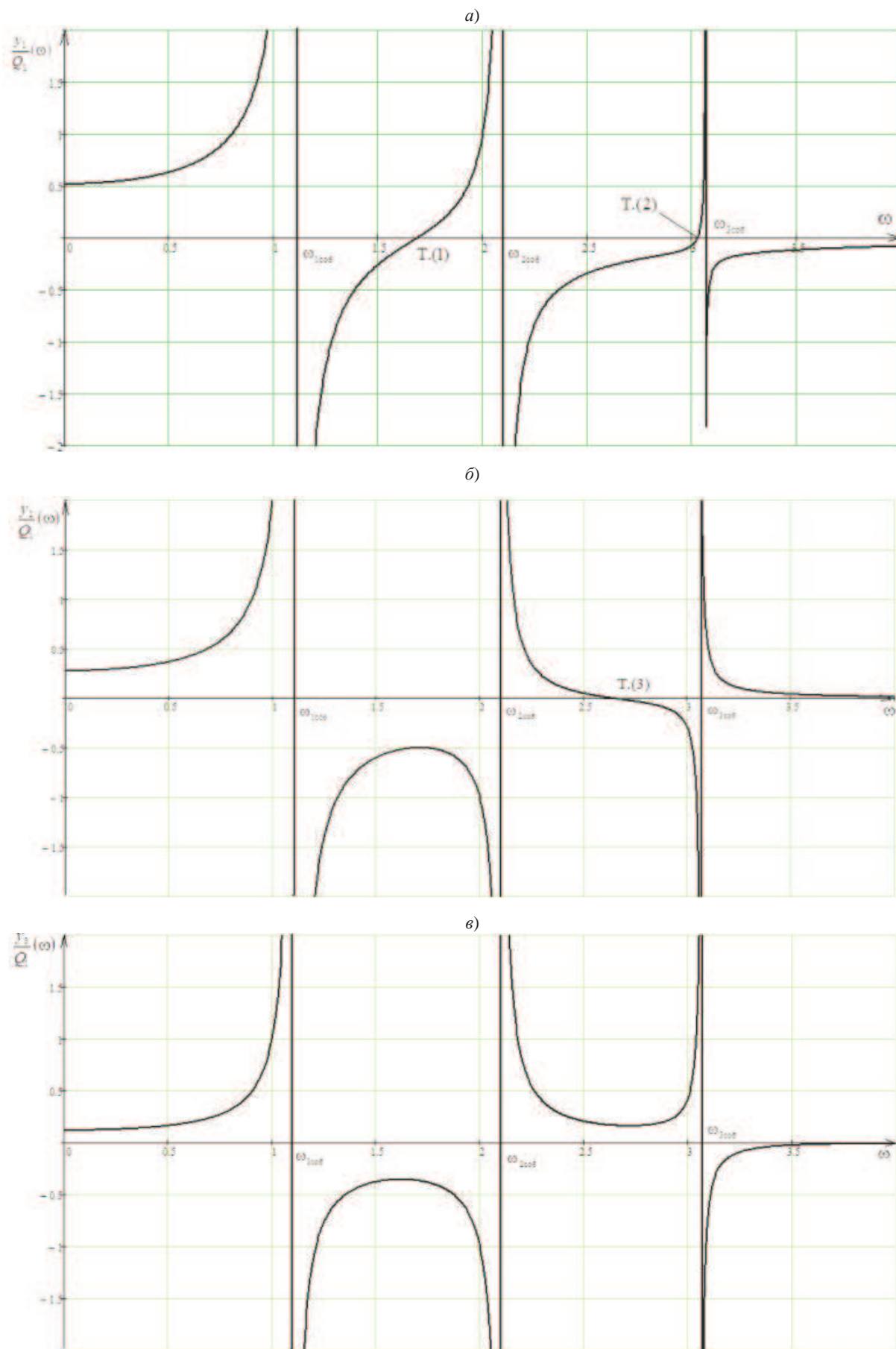


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) системы с тремя степенями свободы при приложении внешней силы к массе m_1 (по рис. 1 а). АЧХ соответствует движению: а — по координате y_1 ; б — по координате y_2 ; в — по координате y_3 ; (т.г. (1), (2), (3) определяют частоты динамического гашения при $Q_1 \neq 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0$)

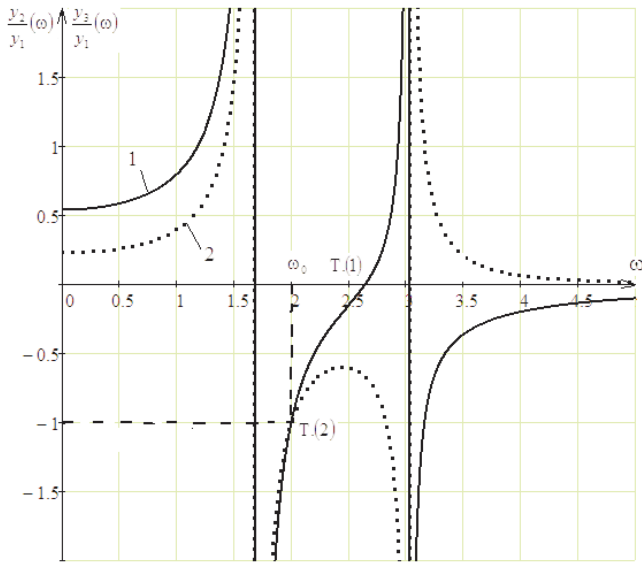


Рис. 5. Графики отношения амплитуд $\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}(\omega)$ и $\frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_1}(\omega)$ колебаний системы с тремя степенями свободы при приложении внешней силы к массе m_1 ($k_5 = 0$): кривая 1 соответствует $\frac{y_2}{y_1}(\omega)$; кривая 2 соответствует $\frac{y_3}{y_1}(\omega)$

При частоте, определяемой выражением (45), движение по координате $y_2 = 0$, что соответствует режиму динамического гашения колебаний (т. (1) на рис. 5).

Одновременно на двух частотах возможны резонансные явления; их частоты n'_2 и n'_3 совпадают с частотами динамического гашения по координате y_1 : частоты определяются из условия $[m_2 m_3] = 0$ (или из решения частотного уравнения (31)). Совместное решение

(36) и (37) при $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_1}$ дает значение частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{k_4}{m_3}, \quad (46)$$

при которой движение по координатам y_2 и y_3 будет происходить «слитно», т. е. с равными амплитудами и в одном направлении (т. (2) и ω_0 на рис. 5).

Детализация представлений о движениях по отдельным координатам носит, при всей общности представлений, ряд отличий в зависимости от способа возбуждения (или места приложения) внешнего возмущения.

На рис. 6 представлена сводная картина взаимодействий элементов системы, что дает возможность выявить некоторые характерные особенности.

Пересечение кривых $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$, описываемых выражениями (43) и (44), определяет частоты собственных колебаний $\omega_{1\text{соб.}}$, $\omega_{2\text{соб.}}$, $\omega_{3\text{соб.}}$. В физическом смысле это можно интерпретировать как выявление частот определенных режимов от приложенного к элементу m_1 внешнего возмущения.

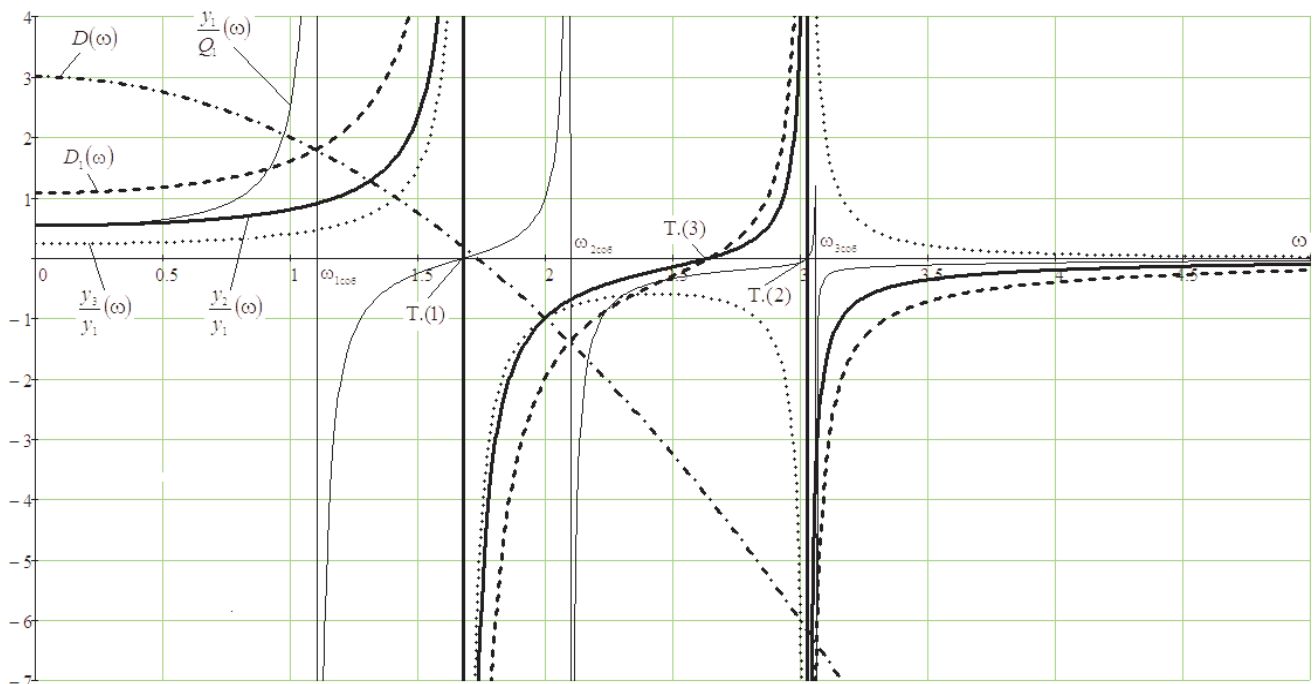


Рис. 6. Схема расположения зависимостей, соответственно обозначенных: — $\frac{y_1}{Q_1}(\omega)$; - · - · - $D(\omega)$; - - - - $D_1(\omega)$; — $\frac{y_2}{y_1}(\omega)$; · · · · $\frac{y_3}{y_1}(\omega)$

При этом на выявленных частотах суммарная динамическая жесткость для системы в целом становится равной нулю. По существу, на каждой из трех частот собственных колебаний выполняется условие:

$$D(\omega) = D_1(\omega). \quad (47)$$

Из (47), в частности, следует, что динамические жесткости могут иметь положительные и отрицательные значения. Вопросы определения динамических жесткостей упругих элементов и квазипружины как обобщенных пружин с приведенными жесткостями, зависящими от частоты, рассматривались в работах [3; 5; 12]. Таким образом, резонансный режим в механической колебательной системе может трактоваться как режим, в рамках которого внешняя гармоническая сила, действуя на инерционный элемент (в данном случае на массу m_1), не встречает на этой частоте «сопротивления» или противодействия.

Динамическая жесткость парциальной системы m_1 , k_1 , k_2 может принимать нулевое значение на частоте, определяемой выражением (38). Нулевое значение динамической жесткости фрагмента механической колебательной системы $D_1(\omega)$, что соответствует частоте, определяемой выражением (45). В подобного рода случаях возможна перемена знака динамических жесткостей и, соответственно, динамических реакций, что «генерирует» определенные формы совместных движений. На графиках зависимостей, приведенных на рис. 5, имеются особенности изменения соотношений $\frac{y_2}{y_1}(\omega)$ и $\frac{y_3}{y_1}(\omega)$, которые в совокупности с движением по координате y_1 дают представление о формах совместных движений элементов системы при нагружении силой Q_1 . В определенной степени такие представления можно отнести к особенностям форм свободных колебаний системы.

Заключение

1. Разработан метод построения математических моделей, который позволяет оценивать новые динамические эффекты, возникающие в механических колебательных системах с несколькими степенями свободы при одновременном действии нескольких синфазных гармонических возмущений.

2. Метод основан на построении структурных математических моделей, что связано с выделением объекта, динамические свойства которого оцениваются введением передаточных функций, отражающих не только отношения между движениями элементов системы и внешними силами, но и передаточных функций межпарциальных связей.

3. Детализация представлений о структуре числителей передаточных функций с последующим определением частот динамического гашения позволяет пред-

ложить поэтапные процедуры формирования необходимых динамических качеств систем, в том числе и для одновременного динамического гашения колебаний по двум координатам.

4. Показано, что расширение динамических возможностей связано с эффектами одновременного действия внешних сил, что изменяет приведенные массоинерционные и упругие характеристики системы.

Литература

1. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
2. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Формы совместных движений элементов трехмассовой колебательной системы: влияние динамических жесткостей // Изв. Транссиба. 2016. № 2 (26). С. 27-41.
3. Антипов В.А. Подавление вибрации агрегатов и узлов транспортных систем: моногр. М.: Маршрут, 2006. 264 с.
4. Брысин А.Н., Шохин А.Е., Синев А.В., Соловьев В.С., Гордеев А.Б., Ерохина Т.В., Степанова Л.А. Совершенствование методики испытаний систем виброзащиты с инерционными преобразователями // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 4. С. 80-83.
5. Kovacs J. Dynamics of mechanical systems and the Generalized Free Body Diagram – Part I: General Formulation // Journal of applied mechanics. 2008. Vol. 75, № 6. P. 61-63.
6. Jun Ju, Imbimbo M., Betti R. Identification of linear structural systems with a limited set of Input – output measurements // Journal of applied mechanics. 2009. Vol. 76, № 3. 031005.
7. Lee W. Analytically approximate solutions for vibrations of a long discrete chain // Journal of applied mechanics. 2003. Vol. 70. № 2.
8. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.
9. Белокобыльский С.В. Импедансные подходы как одна из форм оценки динамических свойств механических колебательных систем в структурном математическом моделировании [Текст] / Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. // Системы. Методы. Технологии. № 4 (28). 2015. С 7-15.
10. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
11. Lus H., De Anqelis M., Betti R. A new approaches for reduced order modeling of mechanical systems // Journal of applied mechanics. 2003. Vol. 70. № 2.
12. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75, № 5. С. 707-717.
13. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.
14. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Большаков Р.С., Каимов Е.В., Кинаш Н.Ж., Нгуен Д.Х. Структурные математические модели в задачах динамики механических

колебательных систем. Иркутск, 2015. 213 с. Деп. В ВИНТИ РАН 30.03.2015, № 62.

15. Harris S.M., Piersol A.G. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw – Hill Book Co, 2002. 1457 p.

16. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / ред. совет. В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1: Колебания линейных систем. 352 с.

References

1. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Applied theory of oscillations in problems of dynamic of linear mechanical systems. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.

2. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Forms of joint movements of elements three-mass oscillatory system: influence of dynamic stiffness // Journal of Transsib Railway Studies. 2016. № 2 (26). P. 27-41.

3. Antipov V.A. Suppression of vibrations components and assemblies of transport systems: monogr. M.: Marshrut, 2006. 264 p.

4. Brysin A.N., Shokhin A.E., Sinev A.V., Solov'ev V.S., Gordeev A.B., Erokhina T.V., Stepanova L.A. Perfection of a technique of tests of vibration protection systems with inertial transducers // Engineering and Automation Problems. 2012. № 4. P. 80-83.

5. Kovecses J. Dynamics of mechanical systems and the Generalized Free Body Diagram - Part I: General Formulation // Journal of applied mechanics. 2008. Vol. 75, № 6. P. 61-63.

6. Jun Ju, Imbimbo M., Betti R. Identification of linear structural systems with a limited set of Input - output measurements // Journal of applied mechanics. 2009. Vol. 76, № 3. 031005.

7. Lee W. Analytically approximate solutions for vibrations of a long discrete chain // Journal of applied mechanics. 2003. Vol. 70. № 2.

8. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping: the concept of feedback and structural methods of mathematical modeling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.

9. Belokobyl'skii S.V. Impedance approaches as an estimation form for dynamical properties of mechanical oscillation systems in structural mathematical modeling // Systems. Methods. Technologies. № 4 (28). 2015. P. 7-15.

10. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical vibration systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.

11. Lus H., De Anqelis M., Betti R. A new approaches for reduced order modeling of mechanical systems // Journal of applied mechanics. 2003. Vol. 70. № 2.

12. Chernous'ko F.L. Analysis and optimization of rectilinear motion of a two-mass system // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2011. T. 75, № 5. P. 707-717.

13. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied problems of the structural theory of vibroprotection systems. SPb.: Politehnika, 2013. 363 p.

14. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I., Bol'shakov R.S., Kaimov E.V., Kinash N.Zh., Nguen D.Kh. Structural mathematical models in problems of the dynamic of mechanical vibration systems. Irkutsk, 2015. 213 p. Деп. В ВИНТИ РАН 30.03.2015, № 62.

15. Harris S.M., Piersol A.G. Shock and Vibration Handbook. New York: McGraw - Hill Book So, 2002. 1457 p.

16. Vibrations in the technique: spravochnik: v 6 t. / red. sovet. V.N. Chelomei (pred.). M.: Mashinostroenie, 1978. Т. 1: Kolebaniya lineinykh sistem. 352 p.