

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534; 833; 888.6, 629.4.015; 02

DOI: 10.18324/2077-5415-2016-3-7-15

Изменение динамического состояния технических объектов на основе введения дополнительных масс и рычажных связей

С.В. Белокобыльский^{1 a}, С.В. Елисеев^{2 b}

¹Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

²Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

^arector@brstu.ru, ^beliseev_s@inbox.ru

Статья поступила 31.06.2016, принята 12.08.2016

Рассматриваются нетрадиционные подходы в решении задач оценки и управления динамическим состоянием технических объектов, расчетные схемы которых могут быть представлены в виде механической колебательной системы с двумя степенями свободы. Объектом является твердое тело, опирающееся на упругие опоры и устройства для преобразования движения. В качестве таких элементов колебательной системы предлагаются рычажные механизмы (рычаги 2-го рода), связанные между собой винтовым не самотормозящимся механизмом с гайкой-маховиком. Разработан метод построения математической модели, позволяющий ввести в рассмотрение передаточные функции системы и соответствующие структурные схемы, что обеспечивает необходимый уровень детализации представлений о наборе возможных форм проявления динамических свойств. Показаны возможности реализации специфических режимов динамических взаимодействий элементов системы при действии вибрации со стороны опорной поверхности, когда при определенном выборе параметров системы достигается одновременное динамическое гашение колебаний по двум координатам. Показано, что динамический эффект достигается за счет устройств для преобразования движения, использующих инерционные силы переносных движений опорной поверхности. Предложена методика получения аналитических соотношений, определяющих условия реализации динамических режимов. Подход может быть распространен на системы с активным управлением и настройкой динамического состояния подвесок, систем виброзащиты и виброизоляции технических объектов, работающих в условиях интенсивного динамического нагружения.

Ключевые слова: виброзащитные системы; передаточные функции; рычажные связи; динамическое гашение колебаний.

Modification for dynamic state of technical objects based on the entry of additional mass and lever ties

S.V. Belokobylsky^{1 a}, S.V. Eliseev^{2 b}

¹Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

²Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia

^arector@brstu.ru, ^beliseev_s@inbox.ru

Received 31.06.2016, accepted 12.08.2016

Non-traditional approaches to solve problems of the assessment and control for dynamic state of technical objects are considered. Calculation schemes of the objects can be presented in the form of mechanical oscillation system with two degrees of freedom. The object is a solid body, resting on the elastic supports and devices for converting motion. Lever mechanisms (levers of the 2nd type), connected together by screw non-braking mechanism with flywheel screw, are presented as such elements of the vibration system. The method is developed for constructing mathematical model to introduce into consideration the transfer function of the system and corresponding structural schemes, which provides the necessary level of detail representations about the set of possible forms of expression of dynamic properties. The possibilities of realization regimes of dynamic interactions of the system elements by the action of vibration from the support surface are shown on, when a certain choice of parameters of the system is achieved by the simultaneous dynamical damping of vibrations in two coordinates. It is shown that the dynamic effect is achieved by the devices for converting motion using the inertial forces of portable movements of the support surface. The method of obtaining analytical relations is offered, defining the conditions of realization of dynamic regimes. The method can be extended to the system with active control and adjustment of the dynamic condition of suspension, systems of vibration protection and vibration isolation of technical objects, working in a vibrating environment.

Key words: vibration protection systems; transfer functions; lever ties; dynamic damping of vibration.

Введение

Динамическое состояние технологических машин и транспортных средств часто сопровождается интенсивными нагрузками со стороны рабочей среды и поверхностей контактов. Достаточно детализированные представления о способах и средствах оценки, контроля и управления динамическим состоянием объектов машиностроения представлено в работах [1–6]. Функциональное разнообразие систем технических объектов инициировало развитие методов математического моделирования динамических взаимодействий элементов различной физической природы, что нашло отражение в широком использовании аппарата теории цепей, теории автоматического управления в приложениях к электромеханическим активным виброзащитным системам и подвескам транспортных средств [7–11].

Вместе с тем усложнились представления о наборе типовых элементов систем, способах их соединения, формирования структурных образований и проявления различных комбинационных эффектов. Большим разнообразием отличаются возможности изменения динамических свойств систем при использовании в их структурах и реализациях функциональных действий различных технических средств, в том числе устройств для преобразования движения и рычажных механизмов [12–15]. Тем не менее, вопросы, связанные с детализацией представлений о методах построения математических моделей для систем с несколькими степенями свободы, введением рычажных и других видов дополнительных связей еще не получили достаточной детализации с учетом потребностей и перспектив развития робототехники и других направлений современного машиностроения [16; 17].

В предлагаемой статье рассматриваются принципы построения систем управления динамическим состоянием объектов с двумя степенями свободы движений с использованием в структуре системы рычажных механизмов и устройств преобразования движения для создания режимов комбинационных взаимодействий и локальной блокировки передачи внешних воздействий.

Некоторые общие положения. Постановка задачи исследования. Рассматриваемая система представляет собой объект в виде твердого тела, совершающего движения в плоскости в координатах y_1, y_2 , а также y_0, φ , где y_0 отображает вертикальные колебания центра тяжести, а координата φ — угловые колебания объекта относительно центра тяжести (рис. 1). Элемент регулировки динамического состояния обозначен W_g , что предполагает возможности установки и использования различных звеньев; это могут быть обычные упругие элементы, демпферы или специальные устройства с сервоприводом.

1. В общем смысле устройство W_g может быть также реализовано в виде вибровозбудителя, работающего в режиме противодействия колебаниям, создаваемым внешними силами. Подобного рода задачи рассматривались в работах [16; 17].

Если W_g — активный элемент, например вибрационный возбудитель, то это можно представить как способ нетрадиционной вибрационной защиты объектов с

рычажным механизмом усиления управляющих воздействий.

С установкой вибровозбудителя система может стать низкочастотным вибростендом, в котором за счет рычажных связей происходит усиление вибрации. При этом полагается, что опорная поверхность неподвижна, а $z(t) = 0$. Та же самая схема может и использоваться для реализации нового способа регулируемой виброзащиты на основе эффектов динамического гашения колебаний.

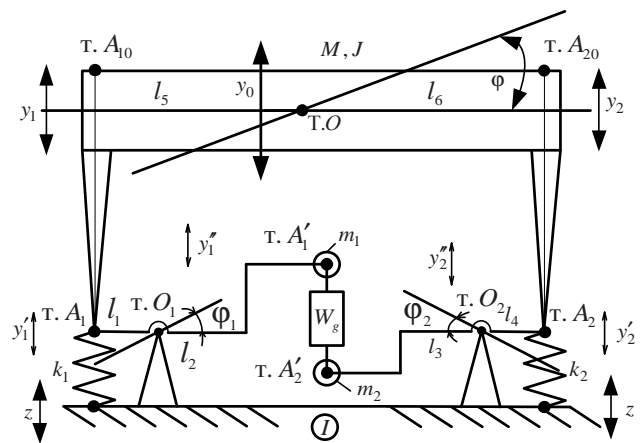


Рис. 1. Принципиальная схема механической колебательной системы, используемой в качестве виброзащитной платформы для установки приборов и аппаратуры

В этом случае W_g может быть представлен упругим пневматическим элементом, жесткость которого регулируется путем подачи сжатого воздуха в исполнительный механизм. Система в этом случае может быть снабжена ресивером, регулирующими устройствами (дресселями), измерительными приборами, блоком обработки сигналов и управления режимами [18; 19]. Подобная схема может быть применима для создания вибростенда с параметрическим возбуждением для создания режимов комбинационного резонанса. В этом случае инерционный вибровозбудитель должен быть инерционного типа и подвешиваться на пружинах k'_1 и k'_2 между массами m (рис. 2).

Вибровозбудитель вращает пригрузки m с угловой скоростью $\omega_{\text{возб}}$, создавая вертикальные гармонические силы, передаваемые другим элементам вибростенда. Что касается упругих звеньев, то при гармоническом изменении жесткостей k'_1 и k'_2 (например, в вариантах пневматических или гидравлических сервоприводов), при сложении колебаний возможно получение параметрических резонансных эффектов [19; 20].

Виброзащитная платформа (рис. 1) представляет собой твердое тело с массой M и моментом инерции J с центром тяжести в точке O (т. O на рис. 1), положение которого определяется длинами плеч $OA_1 = l_5$, $OA_2 = l_6$. Рычажные связи в системе реализуются рычагами 2-го рода с точками опоры (т. O_1 , т. O_2) с поверхностью $z(t)$. Плечи рычагов определяются соответственно $l_1 = A_1O_1$, $l_2 = O_1A'_1$, $l_3 = A'_2O_2$, $l_4 = A_2O_2$. В точках A'_1, A'_2

закрепляются сосредоточенные массы m_1 и m_2 , связанные между собой звеном с передаточной функцией W_g . Такая передаточная функция может быть реализована обычным упругим звеном с жесткостью k_g (в простейшем случае) или иметь более сложную структуру в зависимости от конструктивных особенностей вводимого звена (вплоть до управляемого) и решаемых задач виброзащитной системы. Звено с передаточной функцией W_g может использоваться для настройки виброзащитной системы (ВЗС). Твердое тело (или объект защиты) в тт. A_1, A_2 опирается на упругие элементы с жесткостями k_1 и k_2 .

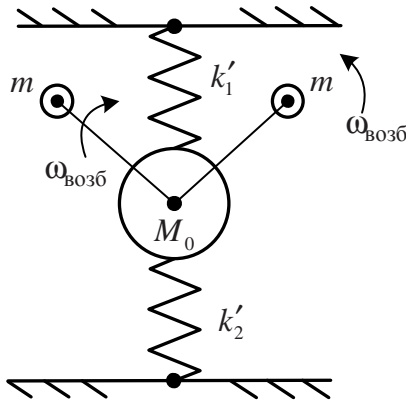


Рис. 2. Принципиальная схема инерционного вибровозбудителя: $\omega_{\text{возб}}$ — скорость вращения возбудителя; m — масса неуравновешенного груза; M — масса двигателя вибровозбудителя

Система в целом совершает малые колебания относительно положения статического равновесия. Система обладает линейными свойствами при отсутствии сил сопротивления движению элементов, которые рассматриваются в системах координат, связанных с неподвижным базисом. Координатами y_0, φ обозначены вертикальные колебания центра тяжести и вращательные движения вокруг т. О. Координаты y_1 и y_2 отражают вертикальные колебания тт. A_1 и A_2 в местах закрепления упругих элементов k_1 и k_2 соответственно. Координаты y'_1 и y'_2 определяют движение концов рычагов, на которых закреплены дополнительные массы m_1 и m_2 , а также концы дополнительного звена с передаточной функцией W_g .

Относительно опорных точек O_1 и O_2 положение рычагов определяется соответственно углами φ_1 и φ_2 . Между координатами системы принимаются следующие соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2, \quad \varphi = c(y_2 - y_1), \quad y_1 = y_0 - l_5\varphi, \\ y_2 = y_0 + l_6\varphi, \quad y'_1 = i_1y_1, \\ y'_2 = i_2y_2, \quad y'_1 = l_1\varphi_1, \quad y'_2 = l_4\varphi_2, \quad i_1 = \frac{l_2}{l_1}, \quad i_2 = \frac{l_3}{l_4}, \quad (1)$$

где i_1, i_2 — передаточные отношения рычажных связей;

$$a = \frac{l_6}{l_5 + l_6}, \quad b = \frac{l_5}{l_5 + l_6}, \quad c = \frac{1}{l_5 + l_6}.$$

Внешние возмущения в системе, приведенной на рис. 1, могут рассматриваться в двух вариантах, силовое возмущение — через сосредоточенные силы, которые могут прикладываться к точкам O, A_{10}, A_{20} . Кроме того, система кинематического возбуждения через движения опорной поверхности $z(t)$ (рис. 1).

Задача исследования заключается в разработке метода построения математической модели для механической колебательной системы, имеющей в своем составе нетрадиционные элементы в виде рычажных механизмов и устройств для преобразования движения. В дальнейшем используется аналитический аппарат структурного математического моделирования, основанного на преобразованиях Лапласа [3–6].

Построение математических моделей системы. Для построения уравнений движения используется уравнение Лагранжа 2-го рода [3].

1. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий в системе координат y_1, y_2 :

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Jc^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \\ + \frac{1}{2}m_1(i_1\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(i_2\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}L(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2, \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k'_2(i_1y_1 - i_2y_2)^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2, \quad (3)$$

где L — приведенная масса устройства для преобразования движения, входящего в состав звена с передаточной функцией W_g ; k'_2 — жесткость упругого элемента, входящего в состав передаточной функции W_g [3; 14; 15].

Используя преобразования Лапласа при начальных нулевых условиях, получим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые в операторной форме приведены в табл. 1. В данном случае предполагается, что внешняя гармоническая сила $Q_1(t)$ приложена по координате y_1 в точке крепления пружины с жесткостью k_1 (т. А).

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения системы в операторной форме в координатах y_1, y_2

a_{11}	a_{12}
$(Ma^2 + Jc^2 + m_1i_1^2 + L)p^2 + k_1 + k'_2i_1^2$	$(Mab - Jc^2 - L)p^2 - k'_2i_1i_2$
a_{21}	a_{22}
$(Mab - Jc^2 - L)p^2 - k'_2i_1i_2$	$(Mb^2 + Jc^2 + m_2i_2^2 + L)p^2 + k_2 + k'_2i_2^2$
Обобщенные силы	
$\bar{Q}_1 = \bar{Q}$	$\bar{Q}_2 = 0$

Примечание. В табл. 1 $p = j\omega$ — комплексная переменная, значок (–) над переменной соответствует изображению по Лапласу [3; 5; 6].

Структурная схема системы при внешнем силовом возмущении \bar{Q}_1 приведена на рис. 3.

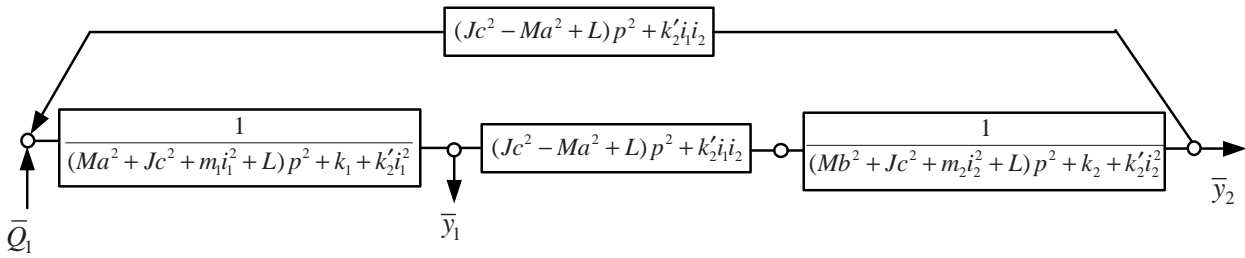


Рис. 3. Структурная схема исходной системы по рис. 1 с внешним силовым возмущением \bar{Q}_1

Передаточные функции системы, как это следует из структурной схемы на рис. 3, имеют соответственно вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{(Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + L)p^2 + k_2 + k'_2 i_2'^2}{A_0(p)}, \quad (4)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \frac{(Jc^2 - Mab + L)p^2 + k'_2 i_1 i_2}{A_0(p)}, \quad (5)$$

$$A_0(p) = [(Ma^2 + Jc^2 + m_1 i_1^2 + L)p^2 + k_1 + k'_2 i_1'^2] \times \\ \times [(Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + L)p^2 + k_2 + k'_2 i_2'^2] - \\ - [(Jc^2 - Mab + L)p^2 + k'_2 i_1 i_2]^2 \quad (6)$$

— характеристическое уравнение системы в координатах y_1, y_2 .

Соотношения между амплитудами колебаний y_1 и y_2 при действии внешней гармонической силы $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$ определяется передаточной функцией межпарциальной связи:

$$\bar{W}_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{(Jc^2 - Mab + L)p^2 + k'_2 i_1 i_2}{(Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + L)p^2 + k_2 + k'_2 i_2'^2}. \quad (7)$$

Из анализа (7) следует, что при $p = 0$ ($\omega \rightarrow 0$):

$$W_{12}(p)_{p=0} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k'_2 i_1 i_2}{k_2 + k'_2 i_2'^2}, \quad (8)$$

при $p \rightarrow \infty$:

$$W_{12}(p)_{p \rightarrow \infty} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} \rightarrow \frac{Jc^2 - Mab + L}{Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + L}. \quad (9)$$

Таким образом, при нулевой частоте внешней силы отношение амплитуд по координатам \bar{y}_1 и \bar{y}_2 не является нулевым и отражает рычажные свойства системы в статике. При $p \rightarrow \infty$ отношение амплитуд $\frac{y_2}{y_1}$ проходит через режим, когда числитель (7) проходит нулевое значение при частоте:

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k'_2 i_1 i_2}{Jc^2 - Mab + L}; \quad (10)$$

а также через режим «резонанса» на парциальной частоте:

$$\omega_{\text{пар}}^2 = \frac{k_2 + k'_2 i_2'^2}{Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + L}; \quad (11)$$

2. Из структурной схемы следует, что система состоит из двух парциальных блоков, соединенных между собой инерционно-упругой связью.

в конечном итоге при $p \rightarrow \infty$ выражение (9), отражающее динамический эффект, который можно назвать «запиранием» на высоких частотах [3; 5; 6; 12]. На рис. 4 показаны графики зависимостей $\frac{y_2}{y_1}(\omega)$ при двух вариантах сочетания параметров системы — $\omega_{\text{дин}}^2 < \omega_{\text{пар}}^2$ и $\omega_{\text{дин}}^2 > \omega_{\text{пар}}^2$.

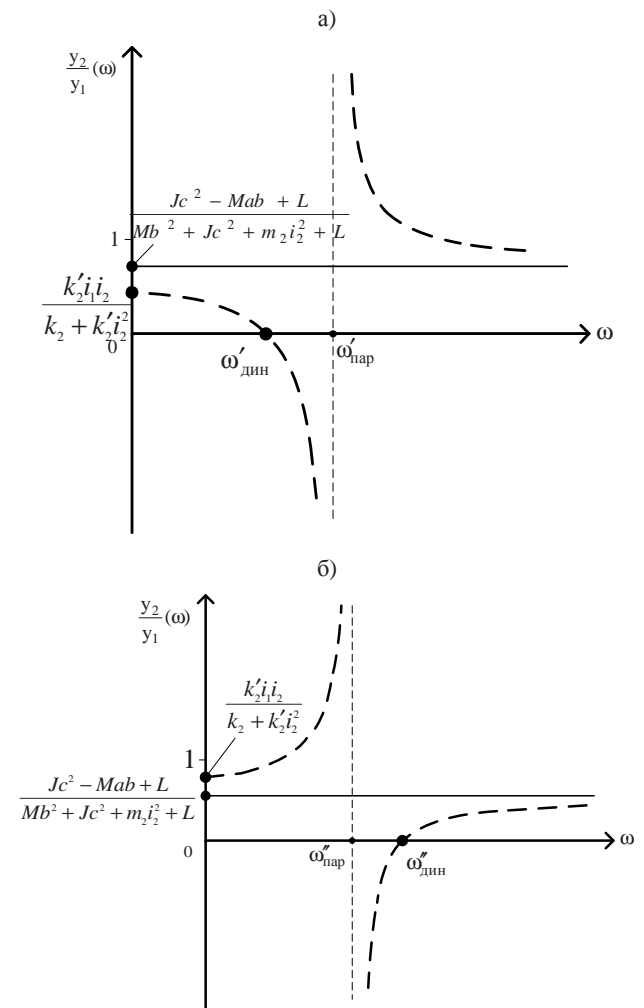


Рис. 4. Графики зависимостей отношения $\frac{y_2}{y_1}(\omega)$: а — кривая соответствует случаю $\omega'_{\text{дин}} < \omega'_{\text{пар}}$; б — кривая соответствует случаю $\omega''_{\text{дин}} > \omega''_{\text{пар}}$

При определенных значениях параметров система может в выражении (7) иметь частоту, при которой одновременно выполняется условие $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ при действии силового возмущения. Система в рассматриваемых координатах совершает движения с фиксированным соотношением амплитуд, аналогичное движению по типу «запирание» при $p \rightarrow \infty$.

3. Если рассматриваются передаточные функции систем, определяемые выражениями (4), (5), то можно отметить, что по каждой из координат y_1 и y_2 при действии внешнего возмущения $\bar{Q}_1 = \bar{Q}$ возможны режимы динамического гашения колебаний.

Из выражения (7), графики которого в принципиальном виде приведены на рис. 4, можно установить ряд характерных соответствий в динамических эффектах. Так, например, возрастание до бесконечно больших значений передаточного отношения $\frac{y_2}{y_1}$

соответствует частоте $\omega_{\text{пар}}^2$, которая определяет режим динамического гашения колебаний по координате y_1 (выражение (4)). В свою очередь, режим $\frac{y_2}{y_1} = 0$ соответствует режиму динамического гашения колебаний по координате y_2 (выражение (5)).

4. Если внешнее силовое воздействие будет приложено не в точке A_{10} , то есть не будет приложено непосредственно по координате движения, то возникает ситуация, когда силовое возмущение будет распределяться по двум входам в парциальные системы. В этом случае может производиться некоторое распределение силовых факторов с последующим использованием принципа суперпозиции [1–3].

Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены при переходе к системе координат y_0, ϕ с соответствующим определением обобщенных сил.

Особенности построения математических моделей системы при кинематическом возмущении со стороны опорной поверхности. Воспользуемся соотношениями между параметрами системы, определяемыми выражениями (1), к которым дополнительно введены обозначения, отражающие наличие новых условий движения:

$$y_1 = \phi_1 l_1 + z; \phi_1 = \frac{y_1 - z}{l_1}; y'_1 = -i_1 y_1 + z(1 + i_1);$$

$$y_2 = \phi_2 l_2 + z; \phi_2 = \frac{y_2 - z}{l_2}; y'_2 = -i_2 y_2 + z(1 + i_2). \quad (12)$$

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий в координатах y_1 и y_2 при кинематическом возмущении $z(t) \neq 0$, ($Q_1 = 0$):

$$T = \frac{1}{2} M (a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} J c^2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 [(-i_1 \dot{y}_1 + \dot{z}(1 + i_1))]^2 + \frac{1}{2} m_2 [(-i_2 \dot{y}_2 + \dot{z}(1 + i_2))]^2 + \frac{1}{2} L [(-i_1 \dot{y}_1 + i_2 \dot{y}_2 + \dot{z}(i_1 - i_2))]^2, \quad (13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z)^2 + \frac{1}{2} k'_2 [(-i_1 y_1 + i_2 y_2 + \dot{z}(i_1 - i_2))]^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z)^2. \quad (14)$$

После соответствующих промежуточных преобразований, связанных с использованием уравнения Лагранжа 2-го рода для вывода уравнений движения [3; 5; 12], получим систему дифференциальных уравнений движения в координатах y_1, y_2 при кинематическом возмущении $z(t)$. После преобразования исходной системы по Лапласу при нулевых начальных условиях система уравнений движения в операторной форме будет иметь коэффициенты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты уравнений движения системы в координатах y_1, y_2 при кинематическом возмущении \bar{z}

a_{11}	a_{12}
$(Ma^2 + Jc^2 + m_1 i_1^2 + Li_1^2)p^2 + k_1 + k'_2 i_1^2$	$(Mab - Jc^2 - Li_1 i_2)p^2 - k'_2 i_1 i_2$
a_{21}	a_{22}
$(Mab - Jc^2 - Li_1 i_2)p^2 - k'_2 i_1 i_2$	$(Mb^2 + Jc^2 + m_2 i_2^2 + Li_2^2)p^2 + k_2 + k'_2 i_2^2$
Обобщенные силы	
\bar{Q}'_1	\bar{Q}'_2
$\bar{z} \cdot [m_1 i_1 (1 + i_1) + Li_1 (i_1 - i_2)]p^2 + \bar{z} \cdot [k_1 + k'_2 i_1 (i_1 - i_2)]$	$\bar{z} \cdot [m_2 i_2 (1 + i_2) + Li_2 (i_1 - i_2)]p^2 + \bar{z} \cdot [k_2 + k'_2 i_2 (i_1 - i_2)]$

Отметим, что при кинематическом возмущении $z(t)$ со стороны опорной поверхности формируются внешние воздействия сложной структуры одновременно по двум координатам y_1 и y_2 .

Особенности математической модели в координатах y_0, ϕ при силовом возмущении. Воспользуемся соотношениями (1), (12) между параметрами и запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий при кинематическом возмущении $z(t)$ в координатах y_0, ϕ :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 [-i_1 (\dot{y}_0 - l_5 \dot{\phi})]^2 + \frac{1}{2} m_2 [-i_2 (\dot{y}_0 + l_6 \dot{\phi})]^2 + \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2} L [\dot{y}_0 (i_2 - i_1) + \dot{\phi} (i_1 l_5 + i_2 l_6)]^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_0 - l_5 \phi)^2 + \frac{1}{2} k'_2 [y_0 (i_2 - i_1) + \phi (i_1 l_5 + i_2 l_6)]^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_0 + l_6 \phi)^2. \quad (16)$$

1. При силовом внешнем воздействии $Q_1 \neq 0$ после совершения ряда выкладок, аналогичных вышеприведенным в разделах II, III, получим систему уравнений движения в операторной форме в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ (коэффициенты этих уравнений приведены в табл. 3).

В системе координат $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ операторные соотношения a_{11}, a_{22}, a_{12} имеют другой вид по сравнению с системой координат y_1, y_2 . Изменяются соответствующим образом и обобщенные силы. В данном случае от действия внешней силы \bar{Q}_1 в системе координат y_1, y_2 формируется возмущение по двум координатам — $\bar{Q}_{y_0} = \bar{Q}$ и $\bar{Q}_\varphi = \bar{Q} \cdot l_5$.

Таблица 3

Коэффициенты уравнений движения системы в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ при силовом возмущении \bar{Q}_1

a_{11}	a_{12}
$[(M + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2 + L(i_2 - i_1)^2)p^2 + k_1 + k_2 + k_2'(i_2 - i_1)^2]$	$[-m_1 i_1^2 l_5 + m_2 i_2^2 l_6 + L(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]p^2 - k_1 l_5 + k_2 l_6 + k_2'(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)$
a_{21}	a_{22}
$[-m_1 i_1^2 l_5 + m_2 i_2^2 l_6 + L(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]p^2 - k_1 l_5 + k_2 l_6 + k_2'(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)$	$[(J + m_1 i_1^2 l_5^2 + m_2 i_2^2 l_6^2 + L(i_1 l_5 + i_2 l_6)^2)p^2 + k_1 l_5^2 + k_2 l_6^2 + k_2'(i_1 l_5 + i_2 l_6)^2]$
Обобщенные силы	
\bar{Q}_{y_0}	\bar{Q}_φ
\bar{Q}	$\bar{Q} \cdot l_5 = \bar{M}_\varphi$

Структурная схема системы по рис. 1 в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ приведена на рис. 5.

Система координат $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ обладает своими особенностями, определяемыми значениями парциальных частот, режимов динамического гашения, обнуления межпарциальных связей.

Передаточные функции системы при внешнем воздействии \bar{Q} так же, как и передаточная функция межпарциальных связей, могут быть найдены на основе подходов, которые использовались в предыдущих разделах.

Характеристическое уравнение системы в координатах y_0, φ совпадает с характеристическим уравнением системы в координатах y_1, y_2 с учетом докорректирующего сомножителя $(l_5 + l_6)^2$. Что касается передаточной функции межпарциальных связей, то она также отображает рычажные связи между движениями по координатам y_0 и φ , но эти рычажные связи имеют свои особенности, поскольку проявляются во взаимодействиях элементов виртуального винтового механизма, в котором соблюдается постоянное соотношение между параметрами поступательного и вращательного движений [21; 22].

Математические модели системы в координатах y_0, φ при кинематическом возмущении со стороны опорной поверхности. Используя соотношения между перемещениями и параметрами, определяемыми выражениями (1), (12), запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии в координатах y_0, φ :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 [-i_1 (\dot{y}_0 - l_5 \dot{\varphi}) + \dot{z}(1 + i_1)]^2 + \frac{1}{2} m_2 [-i_2 (\dot{y}_0 + l_6 \dot{\varphi}) + \dot{z}(1 + i_2)]^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L [-i_1 (\dot{y}_0 - l_5 \dot{\varphi}) + i_2 (\dot{y}_0 + l_6 \dot{\varphi}) + \dot{z}(i_1 - i_2)]^2, \quad (17)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_0 - l_5 \varphi - z)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_0 + l_6 \varphi - z)^2 + \frac{1}{2} k_2' [-i_1 (y_0 - l_5 \varphi) + i_2 (y_0 + l_6 \varphi) + z(i_1 - i_2)]^2. \quad (18)$$

Используя известные приемы составления дифференциальных уравнений на основе уравнения Лагранжа, после преобразования Лапласа получим математическую модель в операторной форме. В табл. 4 представлены коэффициенты операторных уравнений в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ при кинематическом возмущении.

Таблица 4

Коэффициенты уравнений движения системы в операторной форме в координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$

a_{11}	a_{12}
$[(M + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2 + L(i_2 - i_1)^2)p^2 + k_1 + k_2 + k_2'(i_2 - i_1)^2]$	$[-m_1 i_1^2 l_5 + m_2 i_2^2 l_6 + L(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]p^2 - k_1 l_5 + k_2 l_6 + k_2'(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)$
a_{21}	a_{22}
$[-m_1 i_1^2 l_5 + m_2 i_2^2 l_6 + L(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]p^2 - k_1 l_5 + k_2 l_6 + k_2'(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)$	$[(J + m_1 i_1^2 l_5^2 + m_2 i_2^2 l_6^2 + L(i_1 l_5 + i_2 l_6)^2)p^2 + k_1 l_5^2 + k_2 l_6^2 + k_2'(i_1 l_5 + i_2 l_6)^2]$
Обобщенные силы	
\bar{Q}_1	\bar{Q}_2
$\bar{z} \cdot [m_1 i_1 (1 + i_1) + m_2 i_2 (1 + i_2) + L(i_1 - i_2)^2]p^2 + \bar{z} \cdot [k_1 + k_2 + k_2'(i_1 - i_2)^2]$	$\bar{z} \cdot [-m_1 i_1 (1 + i_1) l_5 + m_2 i_2 (1 + i_2) l_6 + L(i_2 - i_1)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]p^2 + \bar{z} \cdot [-k_1 l_5 + k_2 l_6 - k_2'(i_1 - i_2)(i_1 l_5 + i_2 l_6)]$

Сравнение коэффициентов в системах координат y_0, φ при кинематическом и силовом возмущениях (табл. 3 и 4) показывает, что структура системы, то есть передаточные функции парциальных блоков и межпарциальных связей, не изменяется. Вместе с тем, силовое кинематическое возмущение в системах с дополнительными связями в виде рычажных механизмов и уст-

роЙств для преобразования движения формируют более сложную систему внешних возмущений из-за

влияния инерционных сил переносного движения.

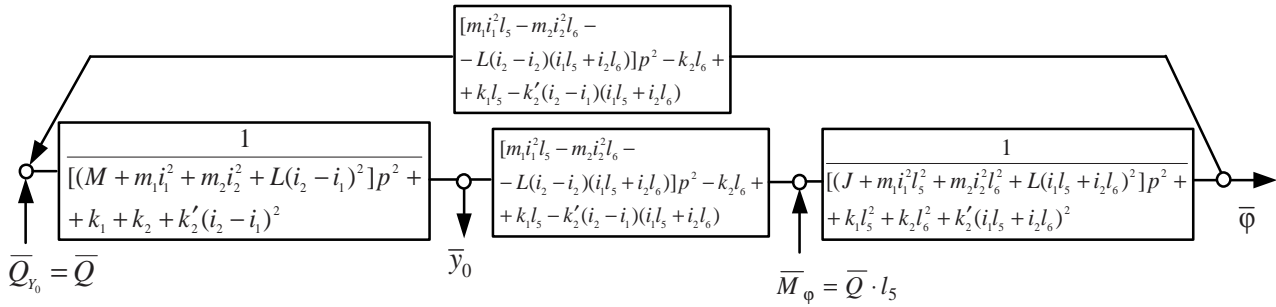


Рис. 5. Структурная схема исходной системы по рис. 1 в системе координатах $\bar{y}_0, \bar{\varphi}$ при силовом возмущении \bar{Q}_1 , приложенном к координате \bar{y}_1

Если дополнительные связи имеют точки опоры на вибрирующей поверхности, то через шарнирные соединения, реализуемые кинематическими парами (т.т. O_1 и O_2) силы инерции создают каналы для динамических взаимодействий. Отметим также, что винтовая несамотормозящая пара с приведенной массой L также воспринимает инерционные силы переносного движения через точки контакта, т.т. A'_1, A'_2 (рис. 1).

Режимы динамического гашения колебаний при кинематическом возмущении. Рассмотрим особенности динамических взаимодействий элементов системы в координатах y_1, y_2 при внешнем возмущении $z(t) \neq 0, (Q_1 = 0)$.

Структурная схема системы по рис. 1 при кинематическом возмущении приведена на рис. 6.

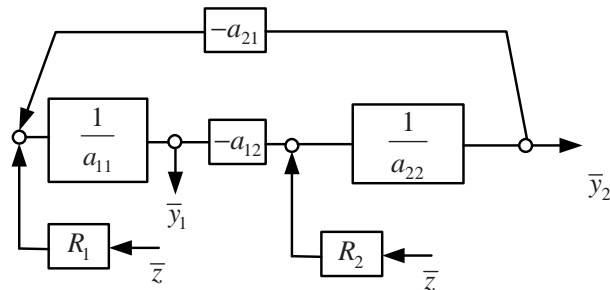


Рис. 6. Структурная схема системы по рис. 1 в системе координат y_1, y_2 при кинематическом возмущении z : $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, R_1, R_2$ — операторы из табл. 2

В частности из табл. 2 следует, что:

$$R_1 = [m_1 i_1 (1 + i_1) + L i_1 (i_1 - i_2)] p^2 + k_1 + k_2' i_1 (i_1 - i_2), \quad (19)$$

$$R_2 = [m_2 i_2 (1 + i_2) + L i_2 (i_1 - i_2)] p^2 + k_2 + k_2' i_2 (i_1 - i_2). \quad (20)$$

Запишем передаточные функции системы в координатах y_1, y_2 при кинематическом возмущении:

$$\begin{aligned} W_1'(p) &= \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{a_{22} R_1 + a_{12} R_2}{A_0(p)}, \\ W_2'(p) &= \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{a_{11} R_2 + a_{12} R_1}{A_0(p)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $A_0(p)$ — характеристическое уравнение, определяемое из (6).

В силу специфики выражений (19), (20) можно отметить, что при определенных условиях становится возможным обеспечение динамического состояния $y_1 = 0, y_2 = 0$. Такая ситуация становится возможной при одновременном выполнении условия $R_1 = 0, R_2 = 0$. В данном случае такое состояние может возникнуть, если совпадут частоты обнуления R_1 и R_2 , что можно представить в виде соотношения:

$$\frac{k_1 + k_2' i_1 (i_1 - i_2)}{m_1 i_1 (1 + i_1) + L i_1 (i_1 - i_2)} = \frac{k_2 + k_2' i_2 (i_1 - i_2)}{m_2 i_2 (1 + i_2) + L i_2 (i_1 - i_2)}. \quad (22)$$

Соотношение (22) позволяет выбирать настроечные параметры таким образом, чтобы обеспечить необходимые условия для формирования динамического состояния объектов (в данном случае — его неподвижного состояния при гармонических колебаниях основания). Отметим также, что возможность обнуления R_1 и R_2 существенно влияет на проявления рычажных связей, определяемых через передаточную функцию межпарциальных связей:

$$W_{12}'(p) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{a_{11} R_2 + a_{12} R_1}{a_{22} R_1 + a_{12} R_2}, \quad (23)$$

Оценка особенностей реализации такого режима требует специального рассмотрения.

Таким образом, оценка динамического состояния механических колебательных систем при наличии в их структурах механизмов и устройств, реализующих дополнительные связи, сопровождается проявлением нетрадиционных динамических эффектов.

Заключение

Многие задачи динамики машин различного технического содержания рассматриваются как разработка способов и средств управления динамическим состоянием объектов. Введение дополнительных связей в основные расчетные схемы, представляющие собой механические колебательные системы с несколькими степенями свободы, вводит в рассмотрение новые динамические эффекты, создаваемые взаимодействиями элементов расширенного набора. К их числу относятся рычажные механизмы, устройства для преобразования и др.

Авторами предлагается метод построения математических моделей механических колебательных систем, в которых набор существующих и известных связей в движениях элементов системы может быть расширен.

Метод основан на введении понятия о структурных математических моделях, которые формируются на основе системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами с последующим применением к ним преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях.

Такие подходы развиты и используются в теории автоматического управления. Получаемая структурная математическая модель в виде эквивалентной в динамическом отношении структурной схемы системы автоматического управления отражает детализированные представления о возможном наборе динамических связей, которыми обладают линейные механические колебательные системы.

В частности, введение в колебательные контуры рычажных механизмов, а также механизмов в виде не самотормозящихся винтовых устройств дает возможность формировать не только схему пространственных силовых взаимодействий между элементами, но и новые эффекты в виде совместных режимов динамического гашения по нескольким степеням свободы, использовать режимы связанных или совместных движений, что характерно, к примеру, для задач вибрационной защиты для объектов, совершающих плоские движения.

Предлагаемый метод представлен детализированным описанием приемов и последовательности действий для построения математических моделей в операторной форме в виде структурных схем. Показаны особенности действия внешних сил различной природы. Особых подходов требует учет кинематических возмущений.

Предлагается технология построения и использования передаточных функций межпарциальных связей. Использование таких функций позволяет детализировать представление о различных формах взаимодействия элементов системы, в том числе и формирование рычажных связей, характерных для механических колебательных систем с несколькими степенями свободы.

Литература

1. De Silva, Clarence W. Vibration: Fundamentals and Practices. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2000. 954 p.
2. Harris C.M., Piersol A.G. Harris Shock and vibration handbook. Mc Graw-Hill Professional, 2002. 1457 p.
3. Елисеев С. В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
4. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 394 с.

5. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 363 с.
6. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459.
7. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир. 1978, 283 с.
8. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
9. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.
10. Поддубный В.И. Трехтлер А., Йекер К.П., Харченко Е., Варкентин А. Моделирование активной подвески для автомобиля повышенной проходимости и оценка возможности ее использования для снижения нагрузки на колесо с поврежденной шиной // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 5. С. 47-50.
11. Козачук Л.С., Стельмашук В.В., Онищук В.П., Козачук И.С. Анализ систем активной безопасности автомобиля // Наукові нотатки. 2014 № 46. С. 270-279.
12. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно – упругие связи: моногр. СПб.: Политехника, 2013. 319 с.
13. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Паршута Е.А., Каимов Е.В. Механизмы в упругих колебательных системах: особенности учета динамических свойств, задачи вибрационной защиты машин, приборов и оборудования. Иркутск: ИрГУПС, 2013. 187 с. деп. в ВИНТИ РАН. 2013. № 243-В2013 15.08. 2013.
14. Елисеев С.В., Паршута Е.А., Каимов Е.В., Кинаш Н.Ж. Механизмы в структуре виброзащитных систем: математические модели, оценка динамических свойств // Вестн. ВСГУТУ. 2014. № 1. С. 37-44; 2015. № 6. С. 52-60.
15. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Каимов Е.В. Устройства для преобразования движения в рычажных структурах // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 4 (44). С. 30-36.
16. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И. Проблемы обеспечения безопасности эксплуатации транспортных систем. Возможности системного подхода // Вестн. Белорус. гос. ун-та транспорта «Наука и транспорт». 2010. № 1. С. 50-59.
17. Елисеев С.В., Упырь Р.Ю., Гозбенко В.Е. Современное состояние разработок в области транспортной динамики. Братск, 2009. 128 с. Деп. в ВИНТИ РАН. № 739-В2009 27.11. 2009.
18. Елисеев С.В., Хоменко А.П., Логунов А.С. Использование в схемах пневматической защиты механизмов или устройств с преобразованием движения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 1. С. 8-13.
19. Елисеев С.В. Мехатроника пневматических виброзащитных систем / Елисеев С.В., Логунов А.С. // Системы. Методы. Технологии. 2010. № 7. С. 9-21.
20. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов РХД. М.; Ижевск, 2006. 158 с.
21. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Каимов Е.В. Рычажные связи: виртуальные рычажные механизмы, особенности ко-

лебательных процессов // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. 2015. № 1 (58). С. 8-17; № 2 (59). С. 8-15.

22. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Каимов Е.В. Виртуальный рычажный механизм: динамическое гашение колебаний как форма проявления рычажных связей // Изв. Транссиба. 2014. № 4 (20). С. 61-71.

References

1. De Silva, Clarence W. *Vibration: Fundamentals and Practices*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2000. 954 p.

2. Harris C.M., Piersol A.G. *Harris Shock and vibration handbook*. Ms Graw-Nill Professional, 2002. 1457 p.

3. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. *Dynamic synthesis of generalized problems of vibration and vibration control of technical objects*. Irkutsk: izd-vo IGU, 2008. 523 p.

4. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P. *Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillation systems*. Novosibirsk: Nauka, 2011. 394 p.

5. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. *Applied problems of the theory of structural vibration isolation systems*. SPb.: Politekhnik, 2013. 363 p.

6. Eliseev S.V., Artyunin A.I. *Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems*. Novosibirsk: Nauka, 2016. 459 p.

7. Lenk A. *Electromechanical system. System with lumped parameters*. M.: Mir, 1978, 283 p.

8. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. *System analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration isolation systems*. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.

9. Eliseev S.V., Khomenko A.P. *Dynamic oscillations: concept of feedback and structural methods of mathematical modeling*. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.

10. Poddubnyi V.I., Trekhtler A., Ieker K.P., Kharchenko E., Varkentin A. *Modeling of active suspension for an all-terrain vehicle and its use to reduce the load on the wheel with the damaged tyre* // *Mechatronics, automation, control*. 2013. № 5. P. 47-50.

11. Kozachuk L.S., Stelmashchuk V.V., Onishchuk V.P., Kozachuk I.S. *Analysis of active safety systems of the car* // *Naukovi notatki*. 2014. № 46. P. 270-279.

12. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. *Dynamics of mechanical systems. Lever and inertial - elastic connection: monogr*. SPb.: Politekhnik, 2013. 319 p.

13. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I., Parshuta E.A., Kaimov E.V. *Mechanisms in elastic vibration systems: features of accounting of dynamic properties, the problem of vibration protection of machines, devices and equipment*. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 187 p. dep. v VINITI RAN. 2013. № 243-V2013 15.08. 2013.

14. Eliseev S.V., Parshuta E.A., Kaimov E.V., Kinash N.Zh. *Mechanisms in the structure of vibration isolation systems: mathematical models, evaluation of dynamic properties (Part I, II)* // *ESSUTM Bulletin*. 2014. № 1. P. 37-44; 2015. № 6. P. 52-60.

15. Eliseev S.V., Artyunin A.I., Kaimov E.V. *The device to convert the motion of the lever structures* // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2014. № 4 (44). P. 30-36.

16. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I. *Problems of ensuring safe operation of transport systems. The possibilities of system approach* // *Bulletin of the Belarusian State University of Transport*. 2010. № 1. P. 50-59.

17. Eliseev S.V., Upyr' R.Yu., Gozbenko V.E. *The modern state of developments in the field of vehicle dynamics*. Bratsk, 2009. 128 p. Dep. v VINITI RAN. № 739-V2009 27.11. 2009.

18. Eliseev S.V., Khomenko A.P., Logunov A.S. *Use in pneumatic circuits protection mechanisms or devices by transforming the movement* // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2010. № 1. P. 8-13.

19. Eliseev S.V. *Mechatronics pneumatic vibration isolation systems* // *Systems. Methods. Technologies*. 2010. № 7. P. 9-21.

20. Panovko G.Ya. *Dynamics of vibrational technological processes*. RHD. M.; Izhevsk, 2006. 158 p.

21. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Kaimov E.V. *Lever ties: virtual lever mechanisms, characteristics of oscillatory processes (Part I, II)* // *Proceedings of the southwest state university*. 2015. № 1 (58). P. 8-17; № 2 (59). P. 8-15.

22. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Kaimov E.V. *Virtual linkage: a dynamic oscillation as a form of appearance of lever ties* // *Izvestia Transsiba (Journal of Transsib Railway Studies)*. 2014. № 4 (20). P. 61-71.