

Главные координаты в решении задач вертикальной динамики транспортного средства

В.Е. Гозбенко^{1 a}, А.И. Карлина^{2 b}, С.К. Каргапольцев^{1 c}

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

²Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова 83, Иркутск, Россия

^avgozbenko@yandex.ru, ^bkarlinat@mail.ru, ^ckck@irgups.ru

Статья поступила 8.08.2016, принята 29.08.2016

Внимание к теории колебаний подвижного состава объясняется прежде всего тем, что колебательные процессы, неизбежно возникающие вследствие движения по, как правило, неровной дороге, ухудшают почти все основные свойства подвижного состава. Рассмотрены колебания четырехосного транспортного средства, имеющего двойное рессорное подвешивание. Исследование колебаний с конечным числом степеней свободы упрощается, если ввести главные координаты этой системы. Для упрощения нахождения главных координат исследованы свободные и вынужденные колебания поддресоренных частей транспортного средства. Принимается, что кузов транспортного средства обладает двумя степенями свободы — боковым отклонением и вилянием. Подпрыгиванием и «галопированием» тележек будем пренебрегать. Общее число степеней свободы модели равно двум. Составив выражения для кинетической и потенциальной энергии и используя уравнения Лагранжа, получаем систему дифференциальных уравнений. Рассмотрение вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы и решение поставленной задачи вертикальной динамики подвижного состава значительно упрощаются при переходе к главным координатам. Полученные дифференциальные уравнения свободных и вынужденных колебаний системы в главных координатах представляют собой два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка.

Ключевые слова: динамика; динамическая модель; колебания; кузов; модель неровности; колесо; возмущения; уравнения движения; жесткость; демпфирование; дифференциальные уравнения; общее решение.

Main coordinates when solving the problems of vehicle vertical dynamics

V.E. Gozbenko^{1 a}, A.I. Karlina^{2 b}, S.K. Kargapoltsev^{1 c}

¹Irkutsk State Transport University; 15, Chernishevsky St., Irkutsk, Russia

²Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

^avgozbenko@yandex.ru, ^bkarlinat@mail.ru, ^ckck@irgups.ru

Received 8.08.2016, accepted 29.08.2016

The attention, paid to the theory of oscillations of a rolling stock, is primarily explained by the fact that oscillatory processes, that inevitably arise due to the motion on, typically, the rough roads, worsen almost all of the basic properties of a rolling stock. Oscillations have been studied for the four-axle vehicle with dual spring suspension. The study of oscillations with a finite number of freedom degrees is simplified if the main coordinates of this system are introduced. To simplify how to find main coordinates, free and forced oscillations of the sprung parts of a vehicle are implemented. It is assumed that the vehicle body has two freedom degrees: lateral motion and wobbling. It has been suggested that bouncing and galloping of trucks can be neglected. The total number of freedom degrees of the model equals to two. Having calculated the kinetic and potential energies and used Lagrange's equations, the resulting system of differential equations can be obtained. Studying forced oscillations of the system with two freedom degrees is greatly simplified when transiting to the main coordinates. The task of the vertical dynamics of a rolling stock is simplified either. Differential equations of free and forced oscillations of a system in main coordinates represent two independent linear differential equations of second order, which greatly simplifies the solution.

Key words: dynamics; dynamic model; oscillations; vehicle body; inequality model; wheel; perturbations; motion equations; stiffness; damping; differential equations; general solution.

Введение

Внимание к теории колебаний подвижного состава объясняется прежде всего тем, что колебательные процессы, неизбежно возникающие вследствие движения по, как правило, неровной дороге ухудшают почти все основные свойства подвижного состава [1–5].

Построение математической модели. Рассмотрим колебания четырехосного транспортного средства,

имеющего двойное рессорное подвешивание (рис. 1). Исследование колебаний с конечным числом степеней свободы значительно упрощается, если ввести главные координаты этой системы [6–9].

Для исследования колебаний поддресоренных частей транспортного средства приняты обозначения:

m_K , m_{T1} , m_{T2} — масса кузова и тележек соответственно; I_K — момент инерции кузова при «галопиро-

вании»; c_{11}, c_{12} — вертикальная жесткость центрального подвешивания тележки; $c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$ — вертикальная жесткость буксового подвешивания колесной пары; z_K, z_{T1}, z_{T2} — текущие вертикальные пе-

ремещения центра тяжести соответственно кузова, первой и второй тележек; φ_K — угловые перемещения кузова; $L_1 + L_2$ — база кузова.

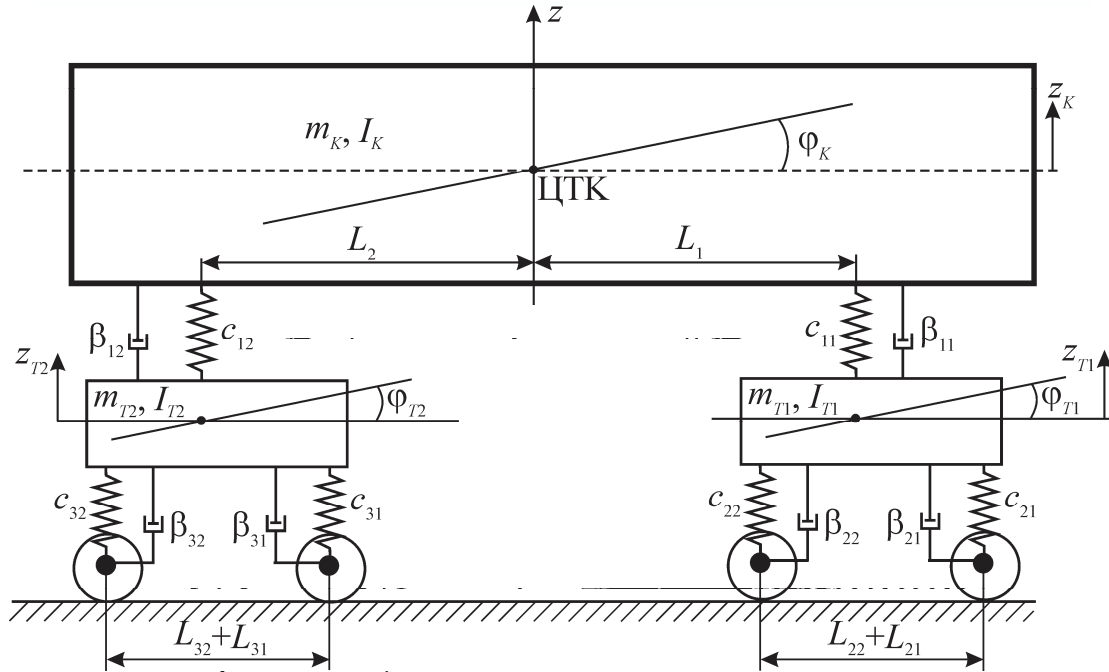


Рис. 1. Расчетная схема колебаний транспортного средства с двухступенчатым рессорным подвешиванием

Все коэффициенты демпфирования примем равными нулю.

Для упрощения нахождения главных координат исследуем свободные и вынужденные колебания подвесных частей транспортного средства. Принимает-

ся, что кузов транспортного средства обладает двумя степенями свободы: боковым отсосом и вилянием, подпрыгиванием и «галопированием» тележек пренебрежем. Общее число степеней свободы модели равно двум (рис. 2) [10–14].

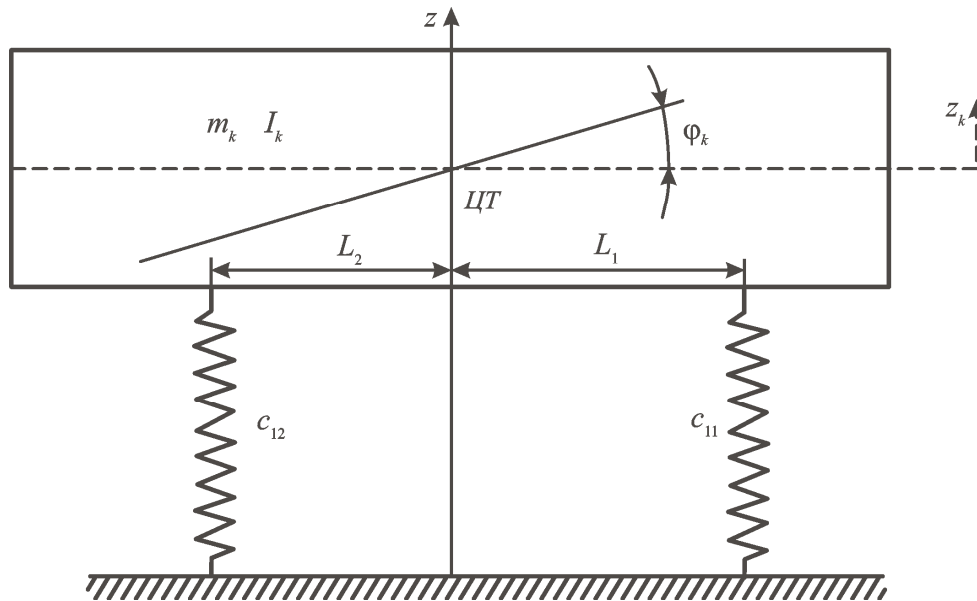


Рис. 2. Расчетная схема колебаний транспортного средства с двумя степенями свободы

Составив выражения для кинетической и потенциальной энергии и используя уравнения Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_K \ddot{z}_K + (c_{11} + c_{12})z_K + (c_{11}L_1 - c_{12}L_2)\varphi_K = 0; \\ I_K \ddot{\varphi}_K + (c_{11}L_1^2 + c_{12}L_2^2)\varphi_K + (c_{11}L_1 - c_{12}L_2)z_K = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для упрощения системы (1) положим $A_{11} = m_K$, $C_{11} = c_{11} + c_{12}$, $C_{12} = C_{21} = c_{11}L_1 - c_{12}L_2$, $A_{22} = I_K$, $C_{22} = c_{11}L_1^2 + c_{12}L_2^2$.

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{z}_K + C_{11}z_K + C_{12}\varphi_K = 0; \\ A_{22}\ddot{\varphi}_K + C_{21}z_K + C_{22}\varphi_K = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введение главных координат значительно упрощает изучение колебаний. Зависимость между обобщенными координатами z_K и φ_K и главными координатами q_1 и q_2 можно выразить так:

$$\begin{cases} z_K = q_1 + q_2; \\ \varphi_K = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2. \end{cases} \quad (3)$$

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2) в виде $z_K = A_1 \sin(kt + \alpha)$, $\varphi_K = A_2 \sin(kt + \alpha)$. Подставляя в (2) и отбрасывая множитель $\sin(kt + \alpha)$, получаем:

$$\begin{cases} A_1(C_{11} - A_{11}k^2) + A_2(C_{12}) = 0; \\ A_1(C_{12}) + A_2(C_{22} - A_{22}k^2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Эта система имеет решение, отличное от тривиального $A_i = 0$, $i = \overline{1, 2}$, если ее определитель равен нулю.

Таким образом, приходим к характеристическому (частотному) уравнению $\Delta(k^2) = 0$.

Считая частоты определенными и различными по величине, получим:

$$k_1^2 = \frac{A_{11}C_{22} + A_{22}C_{11} + \sqrt{A_{11}^2C_{22}^2 - 2A_{11}A_{22}C_{22} + 4A_{11}A_{22}C_{12}^2 + A_{22}^2C_{11}^2}}{2A_{11}A_{22}},$$

$$k_2^2 = \frac{A_{11}C_{22} + A_{22}C_{11} - \sqrt{A_{11}^2C_{22}^2 - 2A_{11}A_{22}C_{22} + 4A_{11}A_{22}C_{12}^2 + A_{22}^2C_{11}^2}}{2A_{11}A_{22}}.$$

Найденный из характеристического уравнения корень k_1^2 подставим в систему (4). Так как определитель $\Delta(k_1^2)$ равен нулю, в системе (4) будет только одно уравнение:

$$\left(C_{11} - A_{11}k_1^2\right) + \frac{A_2}{A_1}C_{12} = 0. \quad (5)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{C_{11} - A_{11}k_1^2}{C_{12}} = \mu_1 \quad (6)$$

$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{C_{11} - A_{11}k_2^2}{C_{12}} = \mu_2 \quad (7)$$

Для того чтобы установить соответствие между коэффициентами инерции A_{11} , A_{22} и a_1 , a_2 , а также коэффициентами жесткости C_{11} , C_{12} , C_{22} и c_1 , c_2 , подставим в выражения кинетической и потенциальной

энергии, вычисленные в обобщенных координатах, их значения из (3) и сопоставим со значениями:

$$T = \frac{1}{2}(a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c_1q_1^2 + c_2q_2^2),$$

получим формулы для вычисления коэффициентов инерции a_1 и a_2 , а также коэффициентов жесткости c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} a_1 = A_{11} + A_{22}\mu_1^2, \\ a_2 = A_{11} + A_{22}\mu_2^2, \\ c_1 = C_{11} + 2C_{12}\mu_1 + C_{22}\mu_1^2, \\ c_2 = C_{11} + 2C_{12}\mu_2 + C_{22}\mu_2^2. \end{cases} \quad (8)$$

Обычно при решении конкретных задач трудно предварительно определить параметры, являющиеся главными координатами системы. Поэтому, выбрав за обобщенные координаты величины, определяющие положение системы, наиболее просто вычисляют частоты главных колебаний k_1 и k_2 при помощи уравнений (4), а затем по формулам (6), (7) находят коэффициенты распределения μ_1 и μ_2 . Так как $z_K = q_1 + q_2$, $\varphi_K = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2$, то:

$$q_1 = \frac{\varphi_K - \mu_2 z_K}{\mu_1 - \mu_2}; \quad q_2 = \frac{\mu_1 z_K - \varphi_K}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения движения в главных координатах q_1 , q_2 примут вид:

$$\begin{cases} a_1\ddot{q}_1 + c_1q_1 = 0; \\ a_2\ddot{q}_2 + c_2q_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Полученные дифференциальные уравнения свободных колебаний системы в главных координатах (10) представляют собой два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка. Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \\ q_2 = C_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{cases} \quad (11)$$

где C_1 , C_2 , α_1 и α_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий [8] при $t = t_0$:

$$z_K = z_{K0}; \quad \dot{z}_K = \dot{z}_{K0}; \quad \varphi_K = \varphi_{K0}; \quad \dot{\varphi}_K = \dot{\varphi}_{K0},$$

тогда:

$$q_1 = q_{10}; \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_{10}; \quad q_2 = q_{20}; \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_{20},$$

где:

$$q_{10} = \frac{\varphi_{K0} - \mu_2 z_{K0}}{\mu_1 - \mu_2}; \quad \dot{q}_{10} = \frac{\dot{\varphi}_{K0} - \mu_2 \dot{z}_{K0}}{\mu_1 - \mu_2};$$

$$q_{20} = \frac{\mu_1 z_{K0} - \varphi_{K0}}{\mu_1 - \mu_2}; \quad \dot{q}_{20} = \frac{\mu_1 \dot{z}_{K0} - \dot{\varphi}_{K0}}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Собственные частоты k_1 и k_2 колебаний системы в главных координатах определяют из уравнений (10) по следующим формулам:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} \text{ и } k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}}. \quad (12)$$

Произвольно выбранные обобщенные координаты оказываются главными координатами системы, если в выражениях кинетической и потенциальной энергий системы коэффициенты A_{12} и C_{12} равны нулю.

Особенно большое значение имеет применение главных координат при изучении вынужденных колебаний системы [7–14].

Рассмотрим вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы. В этом случае на систему действуют возмущающие силы, являющиеся некоторыми заданными функциями времени t . Принимаем, что обобщенные возмущающие силы являются простыми гармоническими функциями времени, имеющими одинаковые частоту p и фазу δ , т. е.:

$$\begin{cases} f_1 = H_1 \sin(pt + \delta); \\ f_2 = H_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (13)$$

На основании (2) дифференциальные уравнения вынужденных колебаний этой системы имеют вид:

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{z}_K + C_{11}z_K + C_{12}\varphi_K = H_1 \sin(pt + \delta); \\ A_{22}\ddot{\varphi}_K + C_{21}z_K + C_{22}\varphi_K = H_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (14)$$

Общее решение этой системы дифференциальных уравнений является суммой общего решения соответствующей системы однородных уравнений, т. е. системы (2), и частного решения системы (14). Первое решение найдено выше, остается определить частное решение.

Рассмотрение вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы значительно упрощается при переходе к главным координатам. По определению обобщенных сил элементарная работа возмущающих сил на возможном перемещении системы может быть представлена в виде:

$$\delta W = f_1 \delta z_K + f_2 \delta \varphi_K.$$

На основании (3):

$$\begin{cases} \delta z_K = \delta q_1 + \delta q_2; \\ \delta \varphi_K = \delta \mu_1 q_1 + \delta \mu_2 q_2. \end{cases}$$

Тогда:

$$\delta W = f_1(\delta q_1 + \delta q_2) + f_2(\delta \mu_1 q_1 + \delta \mu_2 q_2),$$

или:

$$\delta W = (f_1 + \mu_1 f_2)\delta q_1 + (f_1 + \mu_2 f_2)\delta q_2.$$

Поэтому обобщенные силы, соответствующие главным координатам, будут:

$$\begin{cases} f'_1 = f_1 + \mu_1 f_2 = (H_1 + \mu_1 H_2) \sin(pt + \delta); \\ f'_2 = f_1 + \mu_2 f_2 = (H_1 + \mu_2 H_2) \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы в главных координатах имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + k_1^2 q_1 = \frac{H_1 + \mu_1 H_2}{a_1} \sin(pt + \delta), \\ \ddot{q}_2 + k_2^2 q_2 = \frac{H_1 + \mu_2 H_2}{a_2} \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (16)$$

Задача сводится к интегрированию двух не зависящих друг от друга дифференциальных уравнений.

Решения дифференциальных уравнений (16) можно представить в форме:

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \cos k_1 t + \frac{\dot{q}_{10}}{k_1} \sin k_1 t + \\ + \frac{1}{a_1 k_1} \int_0^t (H_1(\xi) + \mu_1 H_2(\xi)) \sin k_1(t - \xi) d\xi, \\ q_2 = q_{20} \cos k_2 t + \frac{\dot{q}_{20}}{k_2} \sin k_2 t + \\ + \frac{1}{a_2 k_2} \int_0^t (H_1(\xi) + \mu_2 H_2(\xi)) \sin k_2(t - \xi) d\xi. \end{cases} \quad (17)$$

По формулам (3) вернемся теперь к исходным неизвестным z_K и φ_K . Тогда получим общее решение системы дифференциальных уравнений (14):

$$\begin{cases} z_K(t) = q_1 + q_2; \\ \varphi_K(t) = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2, \end{cases} \quad (18)$$

содержащее четыре произвольные постоянные [8] $q_1 = q_{10}$; $\dot{q}_1 = \dot{q}_{10}$; $q_2 = q_{20}$; $\dot{q}_2 = \dot{q}_{20}$, которые должны быть определены по начальным значениям обобщенных координат $z_K = z_{K_0}$; $\varphi_K = \varphi_{K_0}$ и обобщенных скоростей $\dot{z}_K = \dot{z}_{K_0}$; $\dot{\varphi}_K = \dot{\varphi}_{K_0}$.

Выводы

Поставленная задача вертикальной динамики подвижного состава упрощается при переходе к главным координатам. Полученные дифференциальные уравнения свободных и вынужденных колебаний системы в главных координатах представляют собой два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка, что значительно упрощает их решение.

Литература

1. Вериго М.Ф. Динамика вагонов. М.: Транспорт, 1988. 174 с.
2. Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д. Динамика вагона. М.: Транспорт, 1991. 360 с.
3. Гарг В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава: пер. с англ. М.: Транспорт, 1988. 391 с.
4. Николаев В.А. Разработка методов аналитического конструирования квазиинвариантных систем рессорного подвешивания железнодорожных экипажей: дис. ... д-ра техн. наук. Омск, 2003. 30 с.
5. Воротилкин А.В., Каргапольцев С.К., Гозбенко В.Е. Математическая модель динамического взаимодействия в системе «колесо-рельс» с учетом их лубрикации / Иркутск. гос. ун-т путей сообщения. Иркутск, 2006. 24 с. Деп. в ВИНТИ. 13.02.2006. № 152. В2006.

6. Оленцевич В. А., Гозбенко В. Е. Анализ причин нарушения безопасности работы железнодорожной транспортной системы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 1. С. 180–183.

7. Ахмадеева А.А., Гозбенко В.Е. Динамические свойства вагона с двухступенчатым рессорным подвешиванием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 3. С. 60-69.

8. Ахмадеева А.А., Гозбенко В.Е. Определение главных координат вагона с двухступенчатым рессорным подвешиванием // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2011. № 4. С. 71-76.

9. Ахмадеева А.А., Гозбенко В.Е., Каргапольцев С.К. Вертикальные колебания экипажа с упруго-подвешенным грузом // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1. С. 42-46.

10. Цисовски Т. Совершенствование систем управления колебаниями подвижного состава железных дорог: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2001. 78 с.

11. Ахмадеева А.А., Гозбенко В.Е., Лыткина Е.М. Колебания экипажа с упруго-подвешенным грузом при силовом возмущении // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 4 (36). С. 47-50.

12. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Гозбенко В.Е., Соболев В.И., Димов А.В., Драч М.А., Титов А.А., Богатов М.Ю., Солодов Г.С., Банина Н.В., Донская Е.Ю., Лукьянов А.В., Засядко А.А., Кузнецов Н.К. Особенности моделирования динамических процессов в задачах управления колебаниями сложных технических объектов. М., 2005. 218 с. Деп. в ВИНТИ 22.02.2005, № 255-В2005.

13. Гозбенко В.Е., Ахмадеева А.А. Вертикальные колебания экипажа с учетом неровностей пути // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 3 (39). С. 56-59.

14. Гозбенко В.Е., Хоменко А.П. Изменение динамического состояния упругосвязанных систем. М., 2002. 37 с. Деп. в ВИНТИ 23.07.2002, № 1379-В02.

References

1. Verigo M.F. Dynamics wagons. M.: Transport, 1988. 174 p.
2. Vershinskii S.V., Danilov V.N., Khusidov V.D. Dynamics of the car. M.: Transport, 1991. 360 p.

3. Garg V.K., Dukkipati R.V. Dynamics of rolling stock: per. s angl. M.: Transport, 1988. 391 p.

4. Nikolaev V.A. Development of methods for analytical design of quasi-invariant systems of spring suspension of railway vehicles: dis. ... d-ra tekhn. nauk. Omsk, 2003. 30 p.

5. Vorotilkin A.V., Kargapol'tsev S.K., Gozbenko V.E. Mathematical model of dynamic interaction in the "wheel-rail" with regard to their lubrication / Irkut. gos. un-t putei soobshcheniya. Irkutsk, 2006. 24 p. Dep. v VINITI. 13.02.2006. № 152. V2006.

6. Olentsevich V.A., Gozbenko V.E. Analysis of the causes of the violation of the safety of the railway transport system // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 1. P. 180-183.

7. Akhmadeeva A.A., Gozbenko V.E. Dynamic properties of the car with two-stage spring suspension // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2010. № 3. P. 60-69.

8. Akhmadeeva A.A., Gozbenko V.E. Determination of the main coordinates of the car with two-res-weed hanging // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2011. № 4. P. 71-76.

9. Akhmadeeva A.A., Gozbenko V.E., Kargapol'tsev S.K. Vertical oscillations of the crew with elastically suspended load // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 1. P. 42-46.

10. Tsisovski T. Improved vibration control systems of railway rolling stock: dis. ... d-ra tekhn. nauk. M., 2001. 78 p.

11. Akhmadeeva A.A., Gozbenko V.E., Lytkina E.M. Fluctuations crew with elastically suspended load in the force perturbation // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. № 4 (36). P. 47-50.

12. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Gozbenko V.E., Sobolev V.I., Dimov A.V., Drach M.A., Titov A.A., Bogatov M.Yu., Solodov G.S., Banina N.V., Donskaya E.Yu., Luk'yanov A.V., Zasyadko A.A., Kuznetsov N.K. Features of modeling of dynamic processes in vibration control problems of complex technical objects. M., 2005. 218 p. Dep. v VINITI 22.02.2005, № 255-V2005.

13. Gozbenko V.E., Akhmadeeva A.A. Vertical oscillations of the crew considering the rough ways // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 3 (39). P. 56-59.

14. Gozbenko V.E., Khomenko A.P. Changing the dynamic state of elastically coupled systems. M., 2002. 37 p. Dep. v VINITI 23.07.2002, № 1379-V02.