УДК 62.752, 621:534; 833; 888.6, 629.4.015;02 DOI: 10.18324/2077-5415-2016-3-16-28

Структурное математическое моделирование в задачах оценки динамических свойств механических колебательных систем

В.Б. Кашуба[1 a], Н.Ж. Кинаш[2 b], А.В. Елисеев[3 c], А.В. Николаев[3 d]

[1]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[2]Московский инженерный центр Московской железной дороги — филиала ОАО «РЖД»,
ул. Краснопрудная 20, Москва, Россия
[3]Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
[a]sitov@ya.ru, [b]n.kinash@mzd.ru, [c]eavsh@ya.ru, [d]nikolaev_av@irgups.ru
Статья поступила 30.06.2016, принята 14.08.2016

Предлагается обобщенный подход к определению приведенных характеристик динамического состояния механических колебательных систем. В качестве приведенных характеристик анализируются упругие и инерционные свойства виброзащитных систем. Развивается методологическая основа использования структурных математических моделей, получаемых в виде структурных схем, эквивалентных в динамическом отношении системам автоматического управления. Показано, что при решении задач оценки динамического состояния объекта защиты приведенные упругие и массоинерционные характеристики могут интерпретироваться как дополнительные отрицательные связи по отношению к этому объекту. Предлагается введение понятия квазипружины как некоторого структурного образования из типовых элементов, а также простейших механизмов и устройств для преобразования движения. Использование приведенных массоинерционных и упругих характеристик обеспечивает упрощение исходных систем до базовых структур с одной степенью свободы. Показано, что сама процедура преобразования характеристик предопределяет выделение точки приведения и максимального упрощения системы. Приведенные массы и жесткости систем зависят от частоты внешних воздействий, что нашло отражение в определении понятий динамической жесткости. Предлагается технология рассмотрения динамических жесткостей системы в целом и ее фрагментов на уровне квазипружин и типовых элементов. Приводятся примеры определения динамических жесткостей. Предлагается обобщенный подход к оценке динамических жесткостей, основанный на использовании характеристического уравнения. В качестве примеров рассмотрены системы с двумя степенями свободы с различными типами парциальных связей.

Ключевые слова: механические колебательные системы; квазипружины; приведенные динамические жесткости; приведенные массы.

Structural mathematical modelling in problems of an estimation of dynamic properties of mechanical oscillatory systems

V.B. Kashuba[1 a], N. Zh. Kinash[2 b], A.V. Eliseev[3 c], A.V. Nikolaev[3 d]

[1]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[2]Moscow Engineering Center of the Moscow railway, branch of JSC «Russian Railways»; 20, Krasnoprudnaya St., Moscow, Russia
[3]Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia
[a]sitov@ya.ru, [b]n.kinash@mzd.ru, [c]eavsh@ya.ru, [d]nikolaev_av@irgups.ru
Received 30.06.2016, accepted 14.08.2016

Generalized approach to determine reduced characteristics of dynamic condition of mechanical oscillation systems is offered. Elastic and inertial properties of vibration protection systems are analyzed as reduced characteristics. Methodological base for using structural mathematical models obtained as structural schemes and equaled dynamically to automation control systems, is developed. It is shown that elastic and mass-inertial characteristics can be interpreted as additional negative ties to the object under protection when solving problems on estimation of dynamic condition of this object. It is proposed to introduce the concept «quasi-springs» as some structural formation of typical elements and simplest mechanisms and devices for movement transformation. Using of reduced mass-inertial and elastic characteristics provides simplification of initial systems to basic structures with one degree of freedom. It is shown that the procedure of characteristic transformation predetermines introduction of adduction point and maximal simplification of system. Reduced masses and stiffnesses of systems depend on frequency of external influence. It is reflected in definitions of dynamic stiffness. Technology is proposed to study dynamic stiffnesses of a whole system and its parts on the level of quasi-springs and typical elements. Examples to determine dynamic stiffnesses are given. Generalized approach to dynamic stiffnesses, based on using characteristic equation, is offered. Systems with two degrees of freedom with different types of partial ties are shown as examples.

Key words: mechanical oscillation systems; quasi-springs; reduced dynamic stiffnesses; reduced masses.

Введение

Технические объекты различного функционального назначения, в отношении которых решаются задачи оценки, контроля и управления динамическим состоянием, часто отображаются расчетными схемами в виде механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами, что дает возможность получения предварительных данных о системе в целом и особенностях динамических взаимодействий составляющих элементов [1–6].

Использование линейных механических систем с несколькими степенями свободы (обычно не более трех-четырех) позволяет реализовать аналитические подходы с получением определенных соотношений и зависимостей, отражающих специфические свойства систем, учет которых не только повышает точность расчетов на прочность и обеспечение надежности и безопасности эксплуатации машин, но и создает условия для поиска и разработки новых конструкторско-технологических решений [7–9].

Возможности упрощения исходных расчетных схем достаточно разнообразны, определяются спецификой решаемых задач динамики и в этом плане тесно связаны с методами приведения сил и получения приведенных параметров динамического состояния, используемых в аналитической и прикладной механике [10–13].

В большей степени приемы упрощения исходных систем и определения приведенных параметров развиты в направлениях, связанных с анализом и динамическим синтезом механизмов, что нашло отражение в работах [14–17]. В меньшей степени изучены возможности использования приведенных параметров механических колебательных систем.

В предлагаемой статье рассматриваются особенности формирования приведенных массоинерционных и обобщенных характеристик в механических колебательных системах, содержащих в своем составе устройства для преобразования движения.

Некоторые общие положения. В теории механизмов и машин приведение силовых факторов, моментов инерции и сосредоточенных масс звеньев механизмов связано с упрощением механизмов до систем с одной степенью свободы (обычно плоских) к виду начального механизма, условно состоящего из ведущего звена, соединенного со стойкой [11; 13; 14], в предположении, что периодический характер движения механизма отображается в соответствующих изменениях приведенных к начальному звену массоинерционных и других параметров [18; 19]. Развитие такого направления опирается на методы графоаналитических исследований [20; 21]. Некоторые обобщенные представления о возможностях оценки механизмов с упругими связями приводятся в [22–25].

В основе определения приведенных параметров важными обстоятельствами являются оценка особенности механической системы (механизма), специфика распределения масс, расположения действующих сил. Основой для определения приведенных параметров являются условия равенства кинетической и потенциальной энергий в исходной системе и ее приведенной модели (чаще всего с одной степенью свободы, что характерно для плоских механизмов). Аналогичным образом могут быть использованы условия эквивалентности производимой механизмом работы и др. Отметим, что в системе предполагается изначальное знание параметров движения всех звеньев механической системы, а приведенные параметры относятся к некоторому выбранному звену механической системы (механизма) или некоторой точке.

Особенности механической колебательной системы. В отличие от механизма, который по определению является механической колебательной системой [11; 26], расчетная схема технического объекта в виде механической колебательной системы (МКС) обладает спецификой, заключающейся в том, что система имеет не только массоинерционные, но и упруго-диссипативные звенья, поэтому при рассмотрении динамических свойств систем возникают определенные особенности.

1. Механическая колебательная система может состоять из нескольких массоинерционных и упругих элементов, однако при определении приведенных параметров предполагается, что динамическое состояние системы зависит от одной координаты.

На рис. 1 показана расчетная схема МКС с одной степенью свободы, определяемой движением некоторого объекта массой m_0 по вертикальной оси y, то есть используется система координат, связанная с неподвижным базисом.

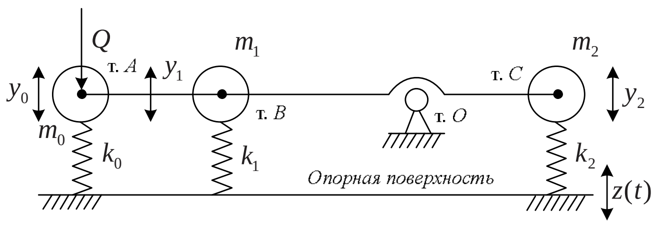

Рис. 1. Система с одной степенью свободы

В механической колебательной системе (рис. 1) в качестве объекта, состояние которого оценивается, выбрана материальная точка с массой m_0 (т. A); элементы в тт. B и C с массами m_1 и m_2 являются дополнительными и вводятся для реализации определенных функций. Все массоинерционные элементы опираются на неподвижную поверхность. Расстояния от тт. A, B, C до центра вращения соответственно обозначены: $AO = l_1$, $BO = l_2$, $CO = l_3$. Каждый из элементов опирается на линейный упругий элемент (k_0, k_1, k_2).

Введем в рассмотрение координаты движения по тт. B, C: $y_1 = \dfrac{l_2}{l_1}\varphi_0$, $y_2 = \dfrac{l_3}{l_1}\varphi_0$, тогда кинетическая энергия системы определится выражением:

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2$$

или:

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}_0^2\left[m_0 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

Поскольку y_0, y_1 и y_2 имеют связи через соотношение длин плеч l_1, l_2, l_3 соответственно, потенциальная энергия системы может быть представлена:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_0 y_0^2 + \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l_2}{l_1}y_0\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{l_3}{l_1}y_0\right)^2$$

или:

$$\Pi = \frac{1}{2}y_0^2\left[k_0 + k_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]. \quad (2)$$

Система на рис. 1 может быть заменена эквивалентной системой с одной степенью свободы, содержащей колебания относительно положения статического равновесия. Схема такой системы приведена на рис. 2.

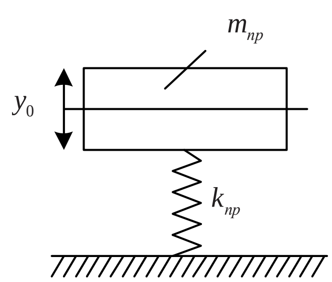

Рис. 2. Расчетная схема системы с одной степенью свободы с приведенными параметрами $k_{пр}$ и $m_{пр}$

По существу, используя выражения (1) и (2), система одного конструктивного вида может быть заменена эквивалентной системой с приведенными жесткостью и массой, в данном случае:

$$\kappa_{пр} = k_0 + k_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2; \quad (3)$$

$$m_{пр} = m_0 + m_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2. \quad (4)$$

Частота собственных колебаний для систем на рис. 1 и 2 будет одной и той же:

$$\omega_{соб}^2 = \frac{k_{пр}}{m_{пр}} = \frac{k_0 + k_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2}{m_0 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2} = , \quad (5)$$

$$= \frac{k_0 + k_1 i_1^2 + k_2 i_2^2}{m_0 + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2}$$

где принято, что $i_1 = l_2/l_1$, $i_2 = l_3/l_1$.

Приведенная масса $m_{пр}$ является массоинерционным параметром системы, который отражает свойства системы с учетом ее пространственной метрики и особенностей конструктивного оформления.

2. Аналогичным образом формируется и физический смысл приведенной жесткости системы, что связано с выбором эквивалентной системы координат для МКС с одной степенью свободы, совершающей вертикальные колебания в неподвижном базисе.

Если в МКС имеются диссипативные элементы (или демпферы вязкого трения), то в линейных системах аналогичным образом могут быть введены в рассмотрение приведенные сопротивления вязкого трения.

3. Введение приведенных массоинерционных и упруго-диссипативных параметров:

$$m_{пр} = m_0 + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2 , \quad (6),$$

$$k_{пр} = k_0 + k_1 i_1^2 + k_2 i_2^2 \quad (7)$$

дает возможность обоснования формирования представлений о так называемых базовых расчетных схемах (или базовых МКС). По определению, такие базовые структуры имеют минимальное число параметров, которые являются приведенными. Аналогичный подход может быть распространен на МКС с двумя и более степенями свободы.

4. Математические модели МКС в линейных постановках задач динамики чаще всего рассматриваются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что предопределяет возможности существенных упрощений моделей при использовании преобразований Лапласа. Теоретические основы таких подходов приводятся, например, в работах [4–6; 27; 28].

На рис. 3 представлена структурная математическая модель системы по рис. 1. Структурная математическая модель представляет собой структурную схему, эквивалентную в динамическом отношении системе автоматического управления при выборе в качестве объекта, динамическое состояние которого оценивается, массоинерционного элемента m_0.

Структурные схемы на рис. 3 *а* – *д* являются графическими аналогами дифференциального уравнения движения, которое формируется на основе выражений (1), (2) для кинетической и потенциальной энергии, например с применением уравнения Лагранжа 2-го рода [5; 28]. На рис. 3 *а* – *д* приняты следующие обозначения: $p = j\omega$ — комплексная переменная, значок < – > определяет изображение переменной по Лапласу; $\overline{Q}$ — изображение по Лапласу внешнего гармонического возмущения; $i_1 = l_2/l_1$, $i_2 = l_3/l_1$ — передаточные отношения.

5. Структурные математические модели на рис. 3 *а* – *д* дают основания определить физический смысл упругих элементов в МКС как обратных отрицательных связей по абсолютному отклонению объекта защиты от положения статического равновесия. В свою очередь, дополнительные массы m_1 и m_2 также могут рассматриваться как отрицательные обратные связи по отношению к объекту m_0.

Особенности рассматриваемых структурных математических моделей заключаются в том, что объект в различных интерпретациях рассматривается как интегрирующее звено второго порядка.

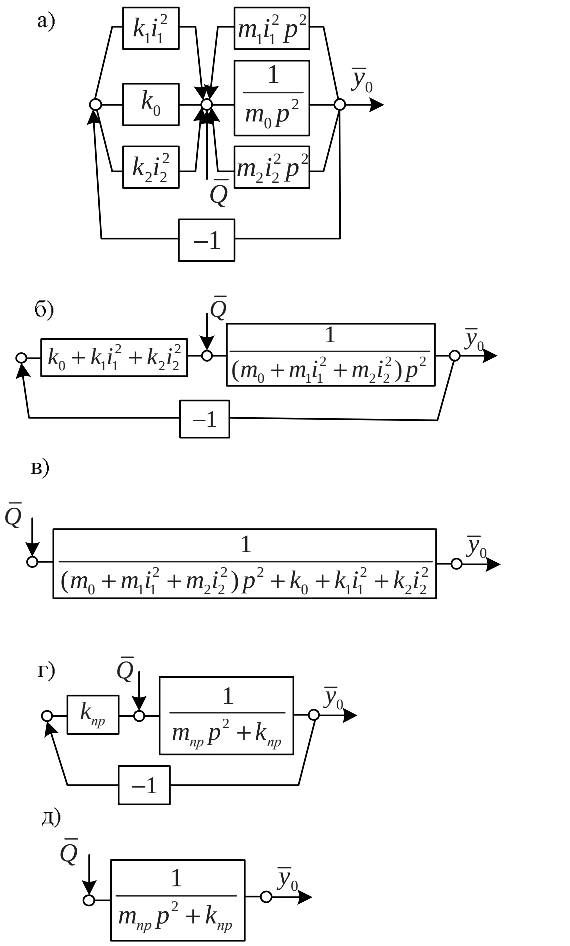

Рис. 3. Варианты структурных математических моделей по схеме на рис. 1 при силовом возмущении: *а* — детализированная структурная схема; *б* — структурная математическая модель по детализированной схеме базовой системы; *в* — обобщенная структурная схема детализированной базовой модели при силовом возмущении $\bar{Q}$; *г* — структурная математическая модель системы по рис. 1 в приведенных параметрах; *д* — обобщенная модель базовой системы в приведенных параметрах при силовом внешнем возмущении

Решение задач динамики, относящихся к уменьшению влияния силовых факторов, в определенном смысле можно отнести к «знаковым» операциям, поскольку большинство задач динамики так или иначе связаны с поиском и разработкой средств оценки, контроля и управления параметрами динамического состояния, соотнесения их с допустимыми нормами, накладываемыми на перемещения скорости, ускорения, реакции связей и прочностных характеристик, относящихся к машинам и механизмам в целом, а также их отдельным взаимодействующим деталям и узлам.

6. Структурные схемы на рис. 3 могут быть интерпретированы с выделением объекта m_0, как это показано на рис. 4, с использованием операторных обозначений [4; 5; 27; 28].

В вышеприведенных разделах показано, что массоинерционные элементы МКС при построении математических моделей, в силу специфики структурного метода, могут восприниматься по-разному, в зависимости от того, является ли массоинерционный элемент «объектом» и как его функциональное назначение определяется, исходя из иных представлений.

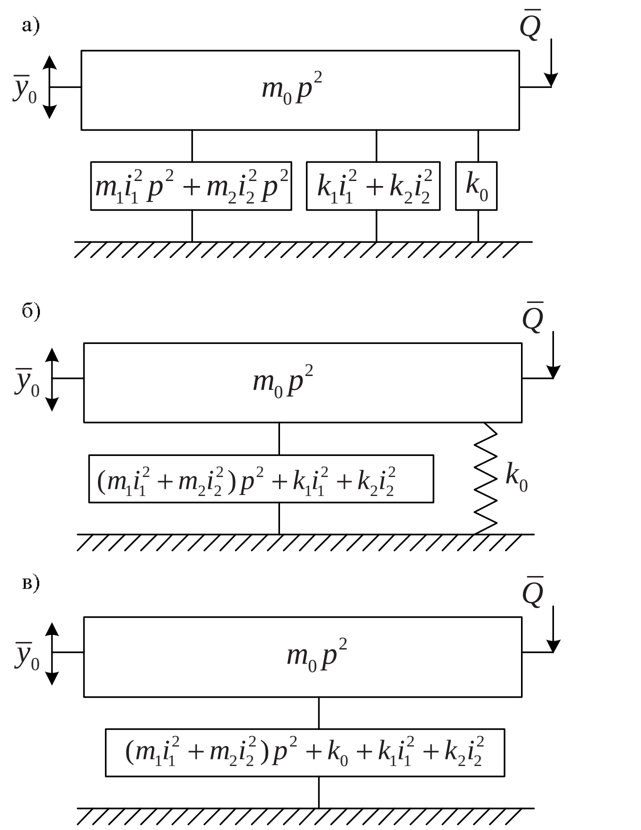

Рис. 4. Расчетная схема по рис. 1 в операторной форме: *а* — объект m_0 с опорой на три элемента МКС; *б* — объект с опорой на обобщенный упругомассовый элемент и опорную пружину k_0; *в* — объект с опорой на квазипружину

На рис. 4 *а* структура исходной системы (рис. 1) определяется как массоинерционный элемент m_0, который опирается на три составляющих элемента:

а) пружину с жесткостью k_0;

б) упругий блок из двух параллельно соединенных пружин с жесткостями $k_1 i_1^2$ и $k_2 i_2^2$;

в) блок параллельно соединенных массоинерционных элементов $m_1 i_1^2 p^2 + m_2 i_2^2 p^2$.

При использовании операторной формы записи отметим, что каждый из трех блоков имеет одну и ту же размерность. Последнее предопределяет возможности рассмотрения дополнительных массоинерционных элементов m_1 и m_2 как некоторых упругих элементов или своеобразных пружин, жесткости которых зависят от ω^2, то есть от частоты внешнего силового возмущения $\bar{Q}$.

7. Такие представления о свойствах типовых массоинерционных и упругих элементов являются основными для структурных математических моделей линейных МКС [4; 5; 27; 28].

На рис. 4 *б* объект массой m_0 рассматривается при опорах на два упругих элемента: пружину с жесткостью k_0 и упругий блок в виде «обобщенной» пружины. Такая пружина представляет собой определенную структуру из типовых элементов, а ее жестокость зависит от частоты колебаний ω. В операторной форме жесткость такого блока определяется выражением $(m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2)p^2 + k_1 i_1^2 + k_2 i_2^2$. Обобщенная пружина работает в соединении с упругим элементом k_0 как обычная пружина, то есть подчиняется правилам последовательного и параллельного соединения пружин [29; 30].

8. На рис. 4 *в* показана результирующая схема, отражающая свойства обобщенных пружин как определенных структурных образований из типовых массоинерционных и упругих элементов. Отметим, что обобщенные пружины обладают динамической жесткостью, зависящей от частоты колебаний, что предполагает возможности получения нулевых, а также бесконечно больших значений жесткости, что, впрочем, достаточно детализировано рассматривалось в работах [31–33].

Рассмотренное выше отражает специфику подходов в оценке динамических свойств линейных МКС в задачах вибрационной защиты объектов, однако это в полной мере приемлемо и в решении других задач динамики, основанных на предварительном выделении в технической системе объекта и соответствующих динамических связей.

Таким образом, логическим развитием идей о введении приведенных массоинерционных и упругих параметров в МКС является переход к более общим представлениям о структурных образованиях из типовых элементарных звеньев МКС, обладающих динамической жесткостью, зависящей от частоты колебаний. Такие структурные образования, как обобщенные пружины, обладающие динамической жесткостью, рассмотрены в работах [34–36].

Специфика МКС, часто применяемых в виде расчетных схем технических объектов, заключается не только в разнообразии конструктивно-технических форм, но и в особенностях внешних воздействий. Обычно полагают, что силовые возмущения прикладываются непосредственно к массоинерционным элементам в виде материальных точек и твердых тел. Более сложные условия возникают при кинематических возмущениях, что характерно для технических объектов в виде технологических машин и транспортных средств, взаимодействующих с окружающей средой, в том числе с опорными поверхностями [4; 5]. Движение опорных поверхностей приводит к появлению в общей схеме нагружения технического объекта дополнительных силовых факторов, реализующих взаимодействия из-за дополнительных перемещений и сил, инициируемых суммированием относительных и переносных движений.

Особенности приведения силовых факторов при кинематическом возмущении системы. В предыдущем разделе внешнее возмущение в МКС с одной степенью свободы представлено сосредоточенной силой Q, приложенной в т. A. Вместе с тем, внешние воздействия могут быть представлены и в виде колебаний $z(t)$ со стороны опорной поверхности. В таком случае массоинерционные элементы будут участвовать в сложном движении: относительном — при угловых колебаниях $\varphi(t)$ и переносном, при движении опорной поверхности — z(t).

Примем, что абсолютная скорость массоинерционного элемента m_0 (его динамическое состояние оценивается в статусе объекта защиты от вибраций) определяется как сумма двух движений (относительного и переносного), тогда:

$$\dot{y}_A = \dot{y}_0 = \varphi l_1 + \dot{z}\,, \tag{8}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{y}_0 - \dot{z}, \tag{9}$$

$$\dot{y}_B = \dot{y}_0 i_1 + \dot{z} + \dot{z} i_1 = \dot{y}_0 i_1 + \dot{z}(1+i_1)\,, \tag{10}$$

$$\dot{y}_3 = \dot{y}_c + \dot{y}_0 i_2 + \dot{z}(1+i_2)\,, \tag{11}$$

где $i_1 = l_2/l_1$, $i_2 = l_3/l_1$.

Для построения математической модели используем уравнение Лагранжа 2-го рода [4; 5] и запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{y}_0 i_1 + \dot{z}(1+i_1)\right]^2 + \\ + \frac{1}{2} m_2 \left[-\dot{y}_0 i_2 + \dot{z}(1+i_2)\right]^2, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\varphi l_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left[-\frac{(\varphi - z)}{\varphi} l_3 + z\right]^2. \tag{13}$$

Уравнение движения системы запишем в виде:

$$\begin{gathered} \ddot{y}_0 (m_0 + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2) + y_0 (k_1 + k_2 i_2^2) = \\ = \ddot{z}\left[-m_1 i_1 (1+i_1) + m_2 i_2 (1+i_2)\right] + \ddot{z}[k_0 + k_2 i_2 (1+i_2)]. \end{gathered} \tag{14}$$

После преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях уравнение движения системы (14) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} \bar{y}_0 p^2 (m_0 + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2) + \bar{y}_0 (k_1 + k_2 i_2^2) = \\ = \bar{z} p^2 \left[-m_1 i_1 (1+i_1) + m_2 i_2 (1+i_2)\right] + \bar{z}[k_0 + k_2 i_2 (1+i_2)]. \end{gathered} \tag{15}$$

Структурная схема системы по рис. 1 приведена на рис. 5.

Отметим, что структурные схемы на рис. 5 *а*, *б* соответствуют структурным схемам, приведенным на рис. 4. Можно в данном случае отметить инвариантность вида базовой структуры системы, полагая ее независимость от типа внешнего воздействия (рис. 5 *в*). Введем обозначения:

$$m_{пр} = m_0 + m_1 i_1^2 + m_2 i_2^2 \tag{16}$$

$$k_{пр} = k_0 + k_2 i_2^2\,, \tag{17}$$

что совпадает с аналогичными для приведенных параметров элементов на схемах (рис. 3) для системы (рис. 1) при силовом возмущении $\overline{Q}$. Вместе с тем, при кинематическом возмущении структура внешнего возмущения существенно изменяется.

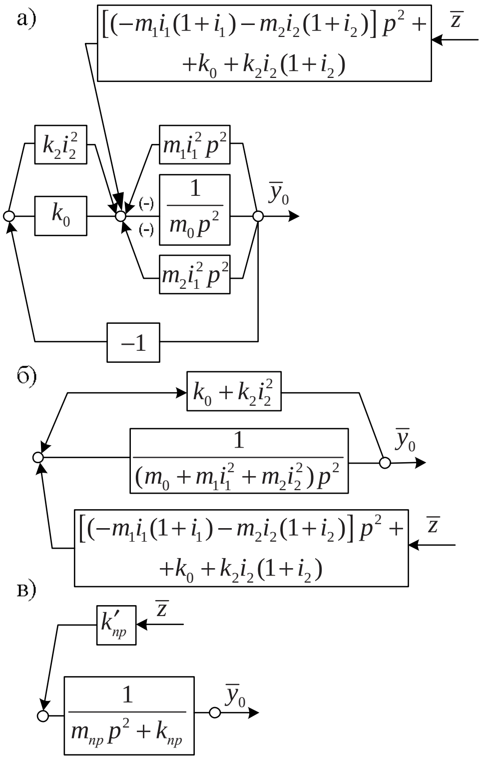

Рис. 5. Структурные схемы системы по рис. 1 при кинематическом возмущении $z(t)$: *а* — структурная детализированная схема с выделением передаточных функций отдельных элементов; *б* — структурная схема общего вида; *в* — структурная схема системы в приведенном виде

Кинематическое воздействие в системе (рис. 1) можно формально заменить эквивалентным возмущением силового типа. При этом, как это следует из рис. 5, эквивалентное возмущение будет определяться выражением:

$$\bar{Q}_{пр.\ экв.} = k'_{пр}\bar{z}\,, \qquad (18)$$

где $k'_{пр}$ представляет собой оператор:

$$k'_{пр} = \left[-m_1i_1(1+i_1)+m_2i_2(1+i_2)\right]p^2+k_0+k_2i_2(1+i_2)\,. \qquad (19)$$

Передаточные функции при разных внешних воздействиях имеют соответственно вид:

$$\underset{\bar{z}=0}{W_1(p)} = \frac{\bar{y}_0}{\bar{Q}} = \frac{1}{m_{пр}+k_{пр}} = \frac{1}{(m_0+m_1i_1^2+m_2i_2^2)+k_0+k_2i_2^2}\,; \qquad (20)$$

$$\underset{\bar{Q}=0}{W_1(p)} = \frac{\bar{y}_0}{\bar{z}} = \frac{\left[-m_1i_1(1+i_1)+m_2i_2(1+i_2)\right]p^2+k_0+k_2i_2(1+i_2)}{m_0+m_1i_1(1+i_1)+m_2i_2(1+i_2)+k_0+k_2i_2^2}\,. \qquad (21)$$

Если кинематическое возмущение перевести в эквивалентное силовое, то с учетом (18) выражение можно привести к виду:

$$\underset{\bar{Q}=0}{W_1(p)} = \frac{\bar{y}_0}{\bar{Q}_{пр.\,экв}} = \frac{1}{m_{пр}p^2+k_{пр}}\,. \qquad (22)$$

Однако в этом случае эквивалентное силовое воздействие, формально давая тот же результат по передаточным функциям через совпадение выражений (20) и (21), в физическом смысле требует уточнения особенностей таких замен. В данном случае силовой фактор становится зависимым от частоты, в том плане, что при частоте:

$$\omega^2_{экв} = \frac{k_0+k_2i_2^2}{-m_1i_1(1+i_1)+m_2i_2(1+i_2)} \qquad (23)$$

силовой фактор $Q_{пр.\ экв.} \to 0$, что «блокирует» воздействия по координате y_0. Такой эффект по координате y_0 можно рассматривать как режим динамического гашения колебаний, создаваемый устройствами для преобразования движения. В ряде работ [5; 28; 37–40] приводятся результаты исследований подобного рода эффектов. Отметим также, что при кинематическом возмущении возможно «запирание» системы при $\omega \to \infty$, что следует из выражения (20):

$$\left|W(p)\right|_{Q=0,\,\omega\to\infty} = \frac{\bar{y}_0}{\bar{z}} = \frac{-m_1i_1(1+i_1)+m_2i_2(1+i_2)}{m_0+m_1i_1^2+m_2i_2^2}\,. \qquad (24)$$

Таким образом, кинематическое возмущение при своих действиях, по физической сути, создают в системе динамические взаимодействия, формируемые дополнительными смещениями элементов упругих связей и инерционными силами переносного движения. Переход таких силовых факторов от одного вида к другому должен осуществляться достаточно осторожно. Это связано, в частности, с тем, что передаточные функции при силовом возмущении имеют физический смысл динамической податливости, а при кинематическом возмущении передаточная функция отражает отношение модулей колебательных процессов на выходе к входному воздействию.

Системы с несколькими степенями свободы: приведенные массы, приведенные жесткости. Многие технические объекты обладают структурами, которые отображаются МКС с двумя и более степенями свободы, что предопределяет достаточно широкий набор вариантов конструктивно-технического представления МКС. При построении структурных математических моделей большое значение имеют выбор системы обобщенных координат и учет особенностей построения парциальных систем. Приведенные массы, жесткости, обобщенные характеристики и структурные образования из типовых элементов отличаются большим разнообразием.

В дальнейшем изложении бòльшее внимание уделяется задачам вибрационной защиты технических объектов, однако развиваемые подходы в полной мере могут быть распространены на решение других задач динамики машин.

Структурное математическое моделирование в развиваемых подходах основано на выделении определенной системы типовых элементов. Их особенность заключается в том, что входным сигналом каждого типового элемента является смещение, а выходным сигналом — силовой фактор (сила или момент силы). Структурные трансформации используемых математических моделей производятся после преобразований Лапласа над дифференциальными уравнениями динамических состояний объектов. Методологические основы подходов и технологии преобразований приводятся в работах [37–39].

1. Механические колебательные системы с двумя степенями свободы имеют две парциальные структуры, каждая из которых может совершать поступательные или вращательные движения. Межпарциальные связи формируют разнообразие взаимодействий между парциальными блоками, что сопровождается проявлениями различных связей между характеристиками процессов движения. К числу таких связей относятся так называемые рычажные связи. Последние могут проявляться не только в явной форме, например в виде рычажных механизмов, но и иметь скрытый механизм действий и форм их проявлений.

На рис. 6 представлены цепная МКС с двумя степенями свободы, ее структурная схема и возможные преобразования при силовом возмущении, приложенном к объекту защиты.

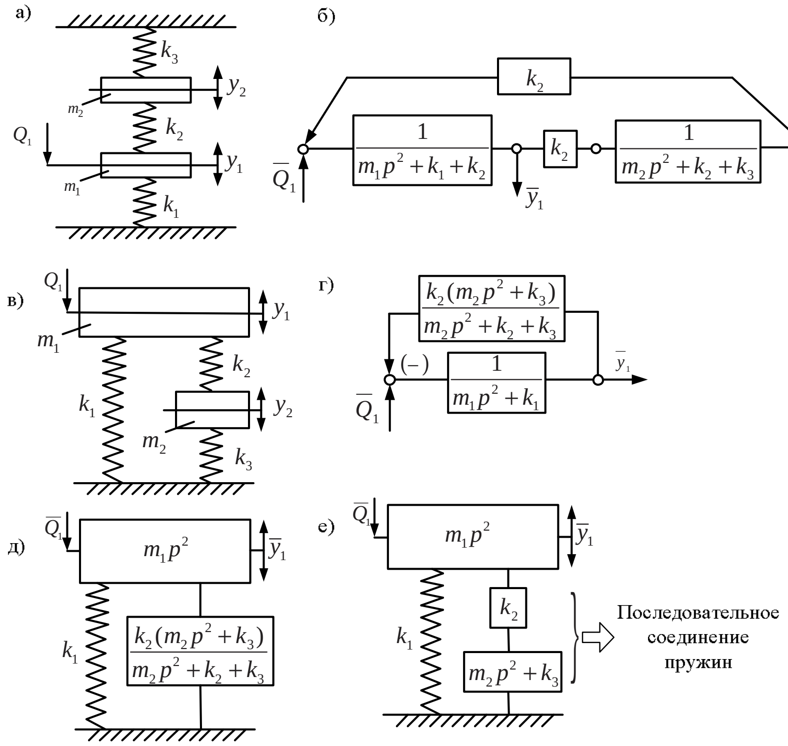

Рис. 6. Принципиальная и структурная схемы для цепной МКС с двумя степенями свободы: *а* — принципиальная схема цепной системы при силовом возмущении; *б* — структурная схема системы; *в* — преобразованная принципиальная схема вибрационной защиты объекта m_1; *г* — структурная схема вибрационной защиты объекта m_1 в базовой конфигурации системы; *д* — принципиальная схема виброзащиты в операторной форме в базовой конфигурации с квазипружиной; *е* — принципиальная схема виброзащиты в операторной форме с детализацией формирования квазипружин

При исследовании динамических свойств технических объектов, например в задачах вибрационной защиты, часто используются понятия приведенных жесткостей, когда система виброзащиты условно приводится к системе с одной степенью свободы (объекту защиты), как это показано на рис. 6 *д* и *е*.

Этапы формирования квазипружины (имеется в виду динамическая жесткость приведенной пружины) производится поэтапно (рис. 6 *б – г*).

На рис. 6 *е* показано, что квазипружина может быть образована последовательным соединением двух структурных блоков меньшей сложности.

Таким образом, приведенные жесткости формируются при решении конкретных задач, с учетом набора элементов системы и связей между ними. Приведенная жесткость в общем случае зависит от частоты внешнего воздействия и в этом смысле является динамической жесткостью. При «занулении» частоты динамическая жесткость становится постоянной и формируется на основе обычных правил последовательного и параллельного соединения пружин. Для определения динамической жесткости необходимо приложение гармонической сосредоточенной силы непосредственно к массоинерционному элементу, смещение которого учитывается в структуре передаточной функции.

Понятие динамической жесткости может быть распространено на системы в целом, ее части, квазипружины, а также отдельные элементы. При отклонении от рассмотренных условий необходима разработка соответствующих приемов.

2. Рассмотрим задачу определения динамических свойств для системы, которая приведена на рис. 6 (цепная система с двумя степенями свободы), но при $m_1 \to 0$. Если $m_1 = 0$, то координата y_1 исчезает из независимых переменных, число которых определяется числом степеней свободы. В данном случае система трансформируется в систему с одной степенью свободы (это будет координата y_2), а сила Q_1 с соответст-

вующими дополнительными связями будет определять смещение по координате y_2. В ряде работ такие задачи рассматриваются как задачи определения перекрестных жесткостей или перекрестных динамических податливостей [41; 42].

Запишем передаточную функцию для системы (рис. 6 *а*):

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \\ = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}. \quad (25)$$

Разделим числитель и знаменатель (25) на оператор $a_{22} = m_2 p^2 + k_2 + k_3$, получим:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{1}{m_1 p^2 + k_1 + k_2 - \dfrac{k_2^2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}}. \quad (26)$$

Инверсия (26) дает выражение для определения динамической жесткости системы:

$$D(\omega) = -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}. \quad (27)$$

Выражение (27) является характеристическим уравнением для системы, представленной структурной схемой на рис. 6 *б*. В этом случае динамическая жесткость системы (27) при $m_1 = 0$ определится выражением:

$$D(\omega) = k_1 + k_2 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3} = \\ = k_1 + \frac{k_2(-m_2\omega^2 + k_3)}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}. \quad (28)$$

Таким образом, при действии Q_1 и $m_1 \to 0$ исчезает координата y_1, что приводит к изменению структуры системы. Она становится системой с одной степенью свободы. В этом случае Q_1 действует на квазипружину, которая состоит из трех элементов, соединенных параллельно:

а) обычная пружина с жесткостью k_1;

б) обобщенная пружина с положительной динамической жесткостью:

$$k_{об1} = \frac{k_2 k_3}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}; \quad (29)$$

в) обобщенная пружина с динамической жесткостью:

$$k_{об2} = \frac{-m\omega^2 - k_2}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}. \quad (30)$$

Обобщенные динамические жесткости $k_{об1}$ и $k_{об2}$ в зависимости от частоты могут принимать положительные и отрицательные значения.

При частоте:

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} \quad (31)$$

жесткости обобщенных пружин могут принимать бесконечно большие значения. Отметим, что из (28) можно сделать в последовательном соединении пружин $k_{об1}$ и $k_{об2}$.

Таким образом, рассматривая ситуацию $m_1 = 0$, можно сделать вывод о том, что приложенная сила Q_1 в данной ситуации определяет особенности динамической жесткости квазипружины.

Что касается приложенной силы Q_1, то она уже не будет определять динамическую жесткость системы в целом из-за ее демонтажа при $m_1 = 0$, но это не исключает возможности получения информации о динамических свойствах фрагментов системы. При «занулении» m_1 в передаточной функции (25):

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \quad (32)$$

сформируется другая система с одной степенью свободы со специфическими свойствами (резонанс, динамическое гашение в системе с одной степенью свободы и «запирание» системы на уровне податливости $\dfrac{1}{k_1 + k_2}$ при $\omega \to \infty$.

Приведенные массы и жесткости. В системах с двумя степенями свободы смешанного типа движения в парциальных блоках могут описываться в различных системах координат. На рис. 7 приведена МКС, в которой объект в виде твердого тела (массой M и моментом инерции J) опирается на упругие опоры (пружины жесткостью k_1 и k_2). Твердое тело имеет центр тяжести (т. O), положение которого определяется значениями отрезков l_1 и l_2. Движение системы может рассматриваться в системе координат y_1 и y_2, связанной с неподвижным базисом. Вместе с этим для описания движения системы могут использоваться координаты центра тяжести y_0 и угол поворота твердого тела φ относительно центра тяжести (т. O). Между системами координат существуют соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1), \\ y_1 = y_0 - l_1\varphi, y_2 = y_0 + l_2\varphi, \\ a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \quad (33)$$

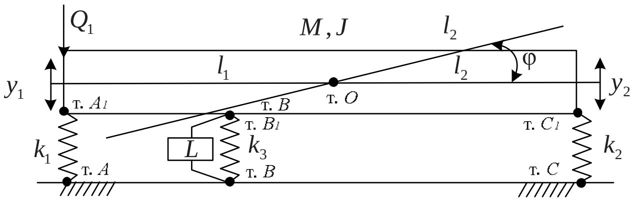

Рис. 7. Принципиальная схема механической колебательной системы с массоинерционными и упругими элементами

Рассматриваемая система (рис. 7), кроме упругих элементов k_1 и k_2, имеет дополнительную пружину жесткостью k_3, закрепленную в т. B_1, которая расположена на расстоянии $B_1O = l_3$ от центра тяжести. Параллельно элементу k_3 в тех же точках введено устройство для преобразования движения (L). Такое звено может быть, к примеру, реализовано на основе не самотормозящегося винтового механизма, где L представляет собой приведенную массу устройства, зависящую от момента инерции гайки-маховика и параметров винтовой кинематической пары [40; 43].

1. Система координат y_1, y_2. В качестве исходных используются выражения для кинетической и потенциальной энергий с последующим применением уравнения Лагранжа 2-го рода. Полагаем, что система обладает линейными свойствами и совершает малые колебания при отсутствии сил трения. Принимая, что $y_{B1} = y_0 - l_3\varphi$, найдем:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}L(\dot{y}_{B1})^2, \tag{34}$$

$$П = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \frac{1}{2}k_3y_{B1}^2. \tag{35}$$

С учетом соотношений между координатами y_1, y_2, y_{B1} и y_0, φ получим:

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Jc^2(y_2 - y_1)^2 + \\ + \frac{1}{2}L\left[\dot{y}_1(a + l_3c) + \dot{y}_2(b - l_3c)^2\right]^2, \tag{36}$$

$$П = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \\ + \frac{1}{2}k_3\left[y_1(a + l_3c) + y_2(b - l_3c)^2\right]^2. \tag{37}$$

Перепишем (36), (37) в виде:

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}Jc^2(y_2 - y_1)^2 + \\ + \frac{1}{2}L\left[a_1\dot{y}_1 + b_1\dot{y}_2\right]^2, \tag{38}$$

$$П = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \frac{1}{2}k_3\left[a_1y_1 + b_1y_2\right]^2, \tag{39}$$

$$a_1 = a + l_3c, b_1 = b - l_3c. \tag{40}$$

В табл. 1 приведены коэффициенты уравнений движения системы с твердым телом в координатах y_1 и y_2.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения в координатах y_1 и y_2

a_{11}	a_{21}
$(Ma^2 + Jc^2 + La_1^2)p^2 + k_1 + k_3a_1^2$	$(Mab - Jc^2 + La_1b_1)p^2 + k_3a_1b_1$
a_{12}	a_{22}
$(Mab - Jc^2 + La_1b_1)p^2 + k_3a_1b_1$	$(Mb^2 + Jc^2 + Lb_1^2)p^2 + k_3b_1^2$
Обобщенные силы	
Q_1	0

На рис. 8 приведена структурная схема системы по рис. 7. Система состоит из двух парциальных блоков и имеет инерционно-упругие связи.

2. Примем, что $L = 0$ и $k_3 = 0$, тогда структурная схема на рис. 8 примет упрощенный вид, как показано на рис. 9.

В системе координат y_0, φ получим структурную схему, как показано на рис. 10.

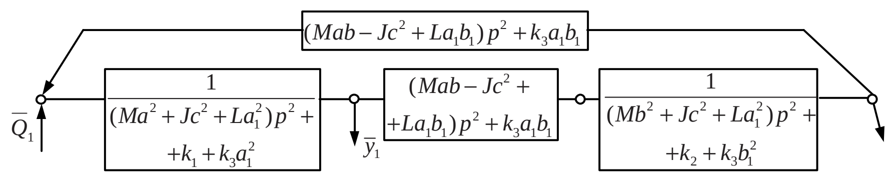

Рис. 8. Структурная схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы с промежуточным твердым телом

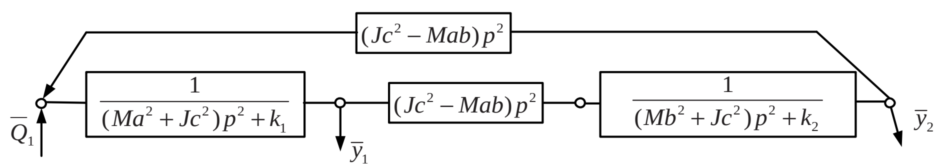

Рис. 9. Структурная схема системы по рис. 7 в координатах $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ при отсутствии дополнительных связей

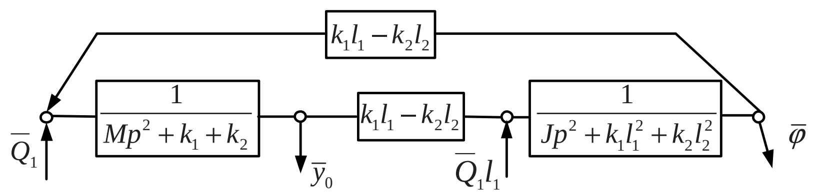

Рис. 10. Структурная схема исходной системы в координатах $\bar{y}_0$, $\bar{\varphi}$ с двумя степенями свободы с промежуточным твердым телом при упругих межпарциальных связях

Отметим, что при переходе к системе координат y_0 и φ меняются и обобщенные силы. Система приобретает два входных внешних силовых воздействия $\overline{Q}_1$ и $\overline{M}_\varphi = \overline{Q}_1 l_1$.

3. Запишем передаточные функции системы в координатах y_1, y_2:

$$W_1(p) = \frac{\overline{y}_1}{\overline{Q}_1} = \frac{(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2}{A_0}, \quad (41)$$

где:

$$\begin{aligned}&\left[(Mp^2 + Jc^2)p^2 + k_1\right] \times \left[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2\right] - \\ &- \left[(Jc^2 - Mab)p^2\right]^2\end{aligned}. \quad (42)$$

Введем на рассмотрение передаточную функцию по координате y_0:

$$W_1(p) = \frac{\overline{y}_0}{\overline{Q}_1} = \frac{(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + [k_1 l_1 - k_2 l_2] l_1}{A_0'}, \quad (43)$$

где:

$$\begin{aligned}A_0' = &\left[Mp^2 + k_1 + k_2\right] \times \left[Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2\right] - \\ &- (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2\end{aligned}. \quad (44)$$

Если сопоставить (42) и (44) и сохранить размерность характеристических уравнений A_0 и A'_0, то уравнения совпадают с точностью до множителя $\frac{1}{l_1 + l_2}$. Таким образом, изменение систем координат не приводит к изменению частот собственных колебаний, что является важным для дальнейшего развития метода определения динамических жесткостей системы.

4. Вернемся к рассмотрению структурной схемы в координатах y_1, y_2 (рис. 9).

Приведем эту структурную схему к форме, характерной для цепных систем с парциальными образованиями, реализующими поступательные движения, что выполняется при условии:

$$\begin{aligned}&(Ma + Jc^2)p^2 + Mabp^2 - Mab^2p^2 + k_1 = \\ &= Map^2 + (Jc^2 - Mab)p^2 + k_1.\end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично получаем:

$$Mbp^2 + (Jc^2 - Mab)p^2 + k_2. \quad (46)$$

Структурная схема на рис. 9 с учетом условий (44), (45) примет вид, как показано на рис. 11.

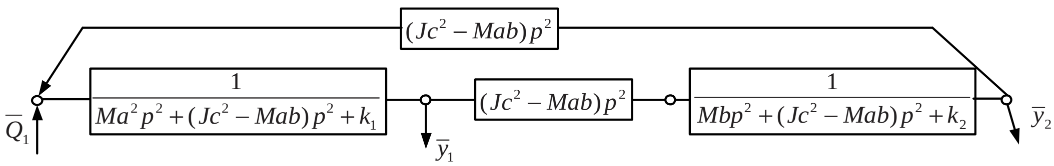

Рис. 11. Структурная схема системы в координатах $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, приведенная к цепному виду структур

Характерные особенности заключаются в том, что система имеет инерционные межпарциальные связи.

В этой системе координат приведенная масса определяется в привязке к координатам y_1 и y_2:

а) по первой парциальной системе (y_1) — $Ma + (Jc^2 - Mab) = Ma^2 + Jc^2$;

б) по второй парциальной системе (y_2) — $Mb + (Jc^2 - Mab) = Mb^2 + Jc^2$.

5. Если система рассматривается в координатах y_0 и φ, то парциальные системы содержат:

по координате y_0 — масса M — жесткости $k_1 + k_2$;

по вращательной парциальной системе (φ) — массоинерционная характеристика — соответствует Jp^2, жесткости вращательного типа.

Таким образом, для упругих характеристик по координатам y_1 и y_2 имеем соответственно $k_1 + k_2$; по координате y_0 — $k_1 + k_2$; по координате φ — $k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$.

Расхождения в приведенных массах и приведенных жесткостях оказывает влияние на парциальные системы. Так, для системы y_1 и y_2:

$$n_1^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jc^2}, \quad (47)$$

$$n_2^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}, \quad (48)$$

В системе координат y_0, φ соответственно получим:

$$n_{10}^2 = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad (49)$$

$$n_{20}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{J}. \quad (50)$$

Таким образом, частоты собственных колебаний системы, определяемые в разных системах координат, не изменяются, но парциальные частоты будут различными. Вместе с тем не исключается возможность существования систем координат, для которых выполняется условие:

$$n_1^2 + n_2^2 = n_{10}^2 + n_{20}^2. \quad (51)$$

Условие (51) может быть доказано с использованием характеристических уравнений (42) и (44).

Заключение

Предлагаемое развитие методологического подхода к формированию приведенных динамических характеристик основано на использовании приемов структурного математического моделирования. В рамках такого подхода исходная механическая колебательная система преобразуется в эквивалентную в динамическом отношении систему автоматического управления. Построение структурных схем показано в ходе изложения материалов исследования и ориентировано на выделение динамических связей и особенностей построения структурных форм. Используются передаточные функции систем при различных видах внешних возмущений.

1. Показано, что в механических колебательных системах, в силу специфики решения задач динамики с выделением объекта, состояние которого оценивается, приведение упругих и диссипативных параметров к точкам приложения воздействий является достаточно распространенным приемом. Однако формирование приведенных жесткостей и массоинерционных параметров зависит от вида внешних сил.

2. Разработана методика определения приведенных характеристик, указан ряд примеров на системах с одной и более степенями свободы. Показаны возможности структурного математического моделирования в преобразованиях, позволяющих формировать необходимые динамические связи.

3. Разработаны приемы эквивалентных преобразований определения приведенных сил для тех случаев, когда внешнее воздействие не приложено к точке измерения параметров.

4. Предложено соотносить упругие свойства приведенных пружин с понятием динамической жесткости квазипружины, которая является структурным образованием типовых элементов и специально вводимых дополнительных связей в виде механизмов и устройств для преобразования движения.

5. Предлагается соотносить понятие динамической жесткости с системой в целом, ее фрагментами (квазипружинами) и типовыми элементами. Показано, что динамический режим резонанса при выужденных колебаниях соответствует ситуации равенства нулю динамической жесткости системы в целом.

6. При нулевых значениях динамической жесткости квазипружин на определенных частотах характерными являются различные формы самоорганизации совместных движений по нескольким координатам системы.

7. Предложен метод определения динамических жесткостей и частот собственных колебаний на основе преобразований характеристического уравнения системы.

Литература

1. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: Минск: ДизайнПРО, 2004. 640 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
3. Демидчик В.И. Элементы теории колебаний. Минск: БГУ, 2004. 151 с.
4. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.
6. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 364 с.
7. Махутов Н.А., Петров В.П., Куксова В.И., Москвитин Г.В. Современные тенденции развития научных исследований по проблемам машиноведения и машиностроения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2008. № 3. С. 3-19.
8. Акимов В.А. Безопасность России. В 2 т. Т. 2. Безопасность железнодорожного транспорта в условиях Сибири и Севера. М., 2014. 856 с.
9. Генкин М.Д., Елисеев С.В., Мигиренко Г.С., Фролов К.В. Принципы современной виброзащиты // Виброизоляция механизмов и машин: науч. тр. Новосиб. ин-та инж. водного транспорта. Новосибирск, 1984. С. 3-13.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1968. 720 с.
11. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1975. 638 с.
12. Лойцянский Л.Г. Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. М.: Наука, 1983. Т. 2. 352 с.
13. Зиновьев Б.А., Бессонов А.П. Основы динамики машинных агрегатов. М.: Машиностроение, 1964. 239 с.
14. Щепетильников В.А. Уравновешивание механизмов. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
15. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1987. 560 с.
16. Вульфсон И.И. Колебания в машинах. СПб.: СПбГУТД, 2006. 260 с.
17. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. М.: Наука, 1988. 358 с.
18. Кожевников С.Н., Зиновьев А.Г. Механизм с упругими звеньями. М.: Наука, 1966. 360 с.
19. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. М.: Наука, 1967. 280 с.
20. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. М.: Гос. изд-тво физ.-мат. лит., 1959. 1084 с.
21. Барсов Г.А., Безменова Л.В., Гродзенская Л.С. Теория плоских механизмов и динамика машин. М.: Высшая школа, 1961. 336 с.
22. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Возможности эквивалентных представлений механических систем с угловыми колебаниями твердых тел // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 2 (42). С. 8-15.
23. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Ситов И.С. Приведенная жесткость цепи обратной связи. Определение динамических реакций в механической колебательной системе // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 2 (18). С. 15-22
24. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В. Приведенные массы в механических колебательных системах с дополнительными инерционными связями // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 4 (24). С. 7-13.
25. Елисеев С.В., Паршута Е.А., Большаков Р.С. Передаточные функции механической колебательной системы. Возможности оценки приведенной жесткости // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 1. С. 11-18.
26. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. Теория механизма и машин. М.: Высшая школа, 1978. 496 с.
27. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.

28. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.

29. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Квазиэлементы в механических колебательных системах. особенности систем при исключении переменных динамического состояния // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2 (38). С. 8-17.

30. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Метод структурных преобразований и его приложения в задачах динамики виброзащитных систем. Определение реакций связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 1. С. 8-23.

31. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации. Иркутск: ИрГУПС, 2013. 460 с. Деп. в ВИНИТИ 02.08.2013 №230 – В 2013.

32. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С. Эквивалентные преобразования структурных математических моделей технических объектов. Иркутск: ИрГУПС, 2015. 79 с. Деп. в ВИНИТИ 20.10.2013 №179 – В 2015

33. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. Вып. № 4 (36). С. 61- 70.

34. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Каимов Е.В., Нгуен Д.Х. Рабочий орган вибрационных машин как динамический гаситель колебаний // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. Иркутск, 2016. № 4 (111). С. 24-39.

35. Елисеев С.В., Ситов И.С., Нгуен Д.Х. Типовой элемент для формирования рычажных связей в динамических взаимодействиях. Структурные подходы // Системы. Методы. Технологии. Братск: БрГУ, 2016. № 1 (29). С. 19-27.

36. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. О возможностях использования дополнительных связей инерционного типа в задачах динамики технических систем // Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. 2016. № 5 (112). С. 19-36.

37. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Ермошенко Ю.В. Метод преобразований механических цепей на основе введения в соединения промежуточных устройств. Иркутск: ИрГУПС 2014. 68 с. Деп. в ВИНИТИ 14.01. 2014 № 19 – В 2014.

38. Белокобыльский С.В., Елисеев, В.Б. Кашуба, Р.С. Большаков. Самоорганизация взаимодействия элементов механических систем в соединениях с устройствами для преобразования движения // Системы. Методы. Технологии. 2016. № 1 (29). С. 19-27.

39. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В. О формах парциальной связности в колебаниях механических систем // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 5-1. С. 15-25.

40. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk.: ISU, 2006. 315 p.

41. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

42. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Перекрестные связи в механических колебательных системах и возможности их изменения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. № 2. С. 8-16.

43. Елисеев А.В., Елисеев С.В., Борисов Б.Г. Устройство для преобразования движения в настройке вибростенда с инерционным возбудителем // Фундаментальные и прикладные научные исследования: сб. ст. междунар. науч.-практической конф. М., 2016. С. 16-20.

References

1. Tarasik V.P. Mathematical modelling of technical systems: Minsk: DizainPRO, 2004. 640 p.

2. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modelling: Ideas. Methods. Examples. 2-e izd., ispr. M.: Fizmatlit, 2001. 320 p.

3. Demidchik V.I. Elements of the theory of oscillations. Minsk: BGU, 2004. 151 p.

4. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in dynamics of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.

5. Eliseev S.V., Reznik Yu.I., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis of generalized problems of vibration and vibration control of technical objects. Irkutsk: IGU, 2008. 523 p.

6. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied problems of the theory of structural vibration isolation systems. SPb.: Politekhnika, 2013. 364 p.

7. Makhutov N.A., Petrov V.P., Kuksova V.I., Moskvitin G.V. Modern trends of development of scientific researches on problems of mechanical engineering and engineering // Engineering and Automation Problems. 2008. № 3. P. 3-19.

8. Akimov V.A. Safety of Russia. V 2 t. T. 2. Safety of a railway transportation in the conditions of Siberia and the North. M., 2014. 856 p.

9. Genkin M.D., Eliseev S.V., Migirenko G.S., Frolov K.V. Principles of modern vibration protection // Vibroizolyatsiya mekhanizmov i mashin: nauch. tr. Novosib. in-ta inzh. vodnogo transporta. Novosibirsk, 1984. P. 3-13.

10. Lur'e A.I. Analytical mechanics. M.: Nauka, 1968. 720 p.

11. Artobolevskii I.I. Theory of mechanisms and machines. M.: Nauka, 1975. 638 p.

12. Loitsyanskii L.G., Lur'e A.I. The course of theoretical mechanics: v 2 t. M.: Nauka, 1983. T. 2. 352 p.

13. Zinov'ev B.A., Bessonov A.P. Basics of dynamics of machine units. M.: Mashinostroenie, 1964. 239 p.

14. Shchepetil'nikov V.A. Trim mechanisms. M.: Mashinostroenie, 1982. 256 p.

15. Krainev A.F. Dictionary-reference mechanisms. M.: Mashinostroenie, 1987. 560 p.

16. Vul'fson I.I. Oscillations in machines. SPb.: SPbGUTD, 2006. 260 p.

17. Levitskii N.I. Fluctuations in the mechanisms. M.: Nauka, 1988. 358 p.

18. Kozhevnikov S.N., Zinov'ev A.G. Mechanism with elastic ties. M.: Nauka, 1966. 360 p.

19. Bessonov A.P. Bases of dynamics of mechanisms with variable mass units. M.: Nauka, 1967. 280 p.

20. Artobolevskii I.I., Levitskii N.I., Cherkudinov S.A. The synthesis of planar mechanisms. M.: Gos. izd-tvo fiz.-mat. lit., 1959. 1084 p.

21. Barsov G.A., Bezmenova L.V., Grodzenskaya L.S. The theory of planar mechanisms and dynamics of machinery. M.: Vysshaya shkola, 1961. 336 p.

22. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Possible equivalent representations of mechanical systems with angular oscillation of solid bodies // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2014. № 2 (42). P. 8-15.

23. Eliseev S.V., Kashuba V.B., Sitov I.S. Given the stiffness of the feedback circuit. Determination of dynamic responses in mechanical oscillatory system // Systems. Methods. Technologies. 2013. № 2 (18). P. 15-22.

24. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V. Given mass in mechanical oscillatory systems with additional inertial ties // Systems. Methods. Technologies. 2014. № 4 (24). P. 7-13.

25. Eliseev S.V., Parshuta E.A., Bol'shakov R.S. The transfer function of the mechanical oscillatory system. Assessment opportunities given stiffness // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2013. № 1. P. 11-18.

26. Frolov K.V., Popov S.A., Musatov A.K. Theory of mechanism and machines. M.: Vysshaya shkola, 1978. 496 p.

27. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. System analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration isolation systems. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 288 p.

28. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamic vibration damping. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.

29. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Quasielementals in mechanical oscillatory systems. Aeatures of systems to the exclusion of variables dynamic state // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013. № 2 (38). P. 8-17.

30. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. The method of structural transformation and its applications in problems of dynamics of vibroprotective systems. Determination of reactions of constraints // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2014. № 1. P. 8-23.

31. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Artyunin A.I. Elastic elements in mechanical systems. Structural interpretation. Irkutsk: IrGUPS, 2013. 460 p. Dep. v VINITI 02.08.2013 № 230 - V 2013.

32. Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Bol'shakov R.S. Equivalent transformations of structural mathematical models of technical objects. Irkutsk: IrGUPS, 2015. 79 p. Dep. v VINITI 20.10.2013 № 179 - V 2015.

33. Eliseev S.V., Kovyrshin S.V., Bol'shakov R.S. Features of construction compacts the elastic elements in mechanical oscillatory systems. Interaction with elements of the systems and forms of connection // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. Vyp. № 4 (36). P. 61-70.

34. Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Kaimov E.V., Nguen D.Kh. The working body vibration machines as a dynamic damper // Bulletin of Irkutsk State Technical University. Irkutsk, 2016. № 4 (111). P. 24-39.

35. Eliseev S.V., Sitov I.S., Nguen D.Kh. The model element for shaping the lever-type linkages in dynamic interactions. Structural approaches // Systems. Methods. Technologies. Bratsk: BrGU, 2016. № 1 (29). P. 19-27.

36. Eliseev S.V., Kuznetsov N.K., Bol'shakov R.S., Nguen D.Kh. The possibilities of using additional bonds inertial type in problems of dynamics of technical systems // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2016. № 5 (112). P. 19-36.

37. Eliseev S.V., Artyunin A.I., Ermoshenko Yu.V. The method of transformation of mechanical chains through the introduction of the compound of intermediate devices. Irkutsk: IrGUPS, 2014. 68 p. Dep. v VINITI 14.01. 2014 №19 - V 2014.

38. Belokobyl'skii S.V., Eliseev, V.B. Kashuba, R.S. Bol'shakov. Self-organization of interaction of elements of mechanical systems in connection with devices for conversion of motion // Systems. Methods. Technologies. 2016. № 1 (29). P. 19-27.

39. Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V. The forms of partial coherence in oscillations of mechanical systems // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2014. № 5-1. P. 15-25.

40. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk.: ISU, 2006. 315 p.

41. Kolovskii M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.

42. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Cross coupling in mechanical oscillatory systems and their changes // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2010. № 2. P. 8-16.

43. Eliseev A.V., Eliseev S.V., Borisov B.G. A device for converting motion in the setup of the shake table with the inertial exciter // Fundamental'nye i prikladnye nauchnye issledovaniya: sb. st. mezhdunar. nauch.-prakticheskoi konf. M., 2016. P. 16-20.