ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6 DOI: 10.18324/2077-5415-2016-2-7-17

Упругие элементы: динамические свойства, возможности обобщенных подходов. Квазипружины

С.В. Белокобыльский[1 a], С.В. Елисеев[2 b], В.Б. Кашуба[1 c]

[1]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[2]Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
[a]rector@brstu.ru, [b]eliseev_s@inbox.ru, [c]nauka@brstu.ru
Статья поступила 29.04.2016, принята 6.05.2016

Предлагается метод оценки динамических свойств механических колебательных систем на основе использования понятий о динамической жесткости. Метод применим для линейных систем и основан на использовании преобразований Лапласа с последующим построением структурных математических моделей. Используется система динамических аналогий и аппарат теории автоматического управления. Вводится понятие квазипружины как структурного образования механических колебательных систем. Такое образование состоит из типовых элементов, соединяемых между собой по правилам, характерным для последовательного и параллельного соединения пружин, а также правил обратной связи. Особенность предлагаемого подхода заключается в распространении понятия динамической жесткости на систему в целом, отдельные части и типовые элементы. Понятие квазипружины предполагает возможности иерархического обобщения динамических жесткостей от типового элемента до системы в целом. Показано, что резонанс в системе соответствует режиму динамического взаимодействия элементов при нулевой динамической жесткости системы в целом. Приводятся примеры преобразований и построения квазипружин. Основой для построения алгоритмов определения частот собственных колебаний системы и выбора форм динамических взаимодействий является характеристическое частотное уравнение системы. Показано, что в физическом смысле характеристическое частотное уравнение представляет собой сумму динамических жесткостей в схемах приведения параметров системы к точке приложения внешней силы. Приведен ряд примеров.

Ключевые слава: динамическая жесткость; квазипружины; формы совместных движений; структурные преобразования.

Elastic elements: dynamic properties, possibilities for generalized approaches. Quasi-springs

S.V. Belokobilskiy[1 a], S.V. Eliseev[2 b], V.B. Kashuba[1 c]

[1]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[2]Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia
[a]rector@brstu.ru, [b]eliseev_s@inbox.ru, [c]nauka@brstu.ru
Received 29.04.2016, accepted 6.05.2016

The method has been proposed to estimate dynamic properties of mechanical oscillation systems based on the concepts of dynamic stiffness. The method can be used for linear systems and is based on the application of Laplace transformations with subsequent construction of structural mathematical models. System of dynamic analogies and rules of automation control theory are used. Concept «quasi-spring» is introduced as structural formation of mechanical oscillation systems. The formation consists of typical elements, connected in accordance with the rules for serial and parallel connecting and the rules of feedback coupling. The peculiarity of the approach proposed lies in the dissemination of the concept of dynamic stiffness on the whole system, its parts and typical elements. The concept of quasi-spring suggests possibilities for hierarchical generalization of dynamic stiffness from typical elements to the system in whole. It is shown that the system resonance correspond to the regime of dynamic interaction of elements at zero dynamic stiffness of the system in whole. Examples for transformations and constructions of quasi-springs are presented. Characteristic frequency equation of the system is a basis for constructing the algorithms of identification of frequencies of characteristic oscillations in the system and for choosing the forms of dynamic interactions. It is also shown that characteristic frequency equations is physically a sum of dynamic stiffness in the schemes for reducing the system parameters to the external force application point. Examples are also given.

Key words: dynamic stiffness; quasi-springs; forms of joint movements; structural transformations.

Введение

Динамические свойства технических объектов предопределяют возможности обеспечения надежной и безопасной работы машин, оборудования, приборов в условиях интенсивного динамического нагружения. Расчетные схемы технических объектов в задачах динамики чаще всего представляют собой механические колебательные системы с ограниченным числом степеней свободы и набором достаточно небольшого числа типовых составляющих или элементов.

Предварительное исследование особенностей динамического состояния объектов является необходимым условием обоснования работоспособности предлагаемых конструктивно-технических решений [1–3].

Методологические основы формирования математических моделей, развитие специальных методов и способов оценки динамических свойств упругих систем нашли отражение в работах [4–6]. В последние годы большое внимание уделяется методам математического моделирования и возможностям использования средств вычислительной техники [7–9].

Элементная база расчетных схем в виде механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами в большинстве случаев формируется из упругих элементов различной природы (или пружин), устройств для диссипации энергии (демпферов), преобразования движения и массоинерционного звена, выступающего в качестве объекта, состояние которого оценивается, а также промежуточных массоинерционных элементов.

Теоретические основы оценки динамических взаимодействий такого рода элементов рассмотрены в работах [10–12].

Определенными возможностями в детализации о формах физических представлений обладают методы структурного математического моделирования, развитые в работах [13–15].

При разработке расчетных схем технические объекты в большинстве своем отображаются достаточно сложными структурами, содержащими элементы, соединенные в группы, компакты и образования, в которых присутствуют разнообразные связи. Процесс упрощения математических моделей вполне закономерен в таких ситуациях, однако практическая реализация таких подходов связана с определенными трудностями. Ряд вопросов в этом направлении нашел отражение в работах [15–20]. Вместе с тем многие особенности предлагаемых упрощений еще далеки от окончательной оценки и требуют большей степени детализации представлений. В частности, это можно отнести к оценке возможностей квазиэлементов, отражающих совокупные динамические свойства определенных структур, в отношении которых могут быть реализованы способы и методы построения приведенных и обобщенных характеристик. Исследования в этом направлении [21–23] обеспечили определенные позиции для решения задач анализа и динамического синтеза [15–20], однако остается ряд принципиальных вопросов и исходных положений, нуждающихся в дальнейшем изучении.

В предлагаемой статье развивается метод построения квазипружин как некоторых структурных образований, обладающих свойствами обычных пружин в различного рода соединениях. Отличие квазипружин от обычных заключается в зависимости их параметров от частоты внешнего гармонического воздействия.

Общие положения. Постановка задачи исследования. Решение многих задач динамики, связанных с поиском и разработкой способов и средств оценки, контроля и управления параметрам динамического состояния, предполагает выделение объекта и формирование расчетных схем в виде механических колебательных систем той или иной сложности. Одним из обобщенных подходов при постановке такого рода задач является математическое моделирование, основанное на использовании структурных схем или динамических аналогов механических колебательных систем в виде эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [8; 15–20].

Характерными в этом плане являются задачи динамики в различных направлениях защиты машин, оборудования, приборов и аппаратуры от вибрационных воздействий и нагрузок. Сопоставление виброзащитных систем и систем автоматического управления основано на общности представлении о выборе объекта защиты (или управления), формировании набора типовых элементов, определении особенностей связей между элементами, правил соединения элементов между собой и преобразования структурных схем.

В определенном смысле задачи виброзащиты для динамики машин могут рассматриваться как развитие обобщенных подходов в анализе и динамическом синтезе с использованием методов структурного математического моделирования [15; 19; 20].

1. Рассмотрим, в качестве примера виброзащитную систему (рис. 1 *а*), состоящую из объекта защиты массой m_1 и типовых элементов с жесткостями k_1, k_2, k_3 и промежуточной массой m_2. Полагая, что внешнее возмущение приложено к массе m_1 и является гармонической силой Q_1, запишем дифференциальные уравнения движения в системе координат y_1, y_2, связанных с неподвижным базисом:

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - k_2 y_2 = Q, \quad (1)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2\cdot(k_2 + k_3) - k_2 y_1 = 0. \quad (2)$$

После преобразований Лапласа (при нулевых начальных условиях) система дифференциальных линейных уравнений (1), (2) может быть преобразована к виду:

$$m_1 p^2 \bar{y}_1 + \bar{y}_1\cdot(k_1 + k_2) - k_2\bar{y}_2 = \overline{Q}, \quad (3)$$

$$m_2 p^2 \bar{y}_2 + \bar{y}_2\cdot(k_2 + k_3) - k_2\bar{y}_1 = 0, \quad (4)$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная, (–) — значок для обозначения переменной по Лапласу [17–20].

Система уравнений (3), (4) может быть интерпретирована в виде эквивалентных схем (графических аналогов уравнений (3), (4)), как показано на рис. 1 *а* в детализированном и обобщенном виде.

Динамические свойства системы определяются набором типовых элементов, как это следует из схем, приведенных на рис. 1 *а*, *б*, *в*. В данном случае на рис. 1 *а* используются типовые элементы в виде линейных пружин (k_1, k_2, k_3), промежуточной массы m_2 и объекта защиты m_1. Структурные аналоги типовых элементов, в частности для пружин, имеют вид типовых усилительных звеньев с передаточными функциями $w_1'(p) = k_1$, $w_2'(p) = k_2$, $w_3'(p) = k_3$. В свою очередь, массоинерционные элементы m_1 и m_2 в структурных отображаются типовыми дифференцирующими элементами второго порядка с передаточными функциями $w_{m_1}'(p) = m_1 p^2$, $w_{m_2}'(p) = m_2 p^2$. Набор типовых звеньев может быть существенно расширен, что нашло отражение в ряде работ [15; 19–21; 24]. В первую очередь это демпферы или диссипативные элементы, имеющие передаточную функцию дифференцирующего звена первого порядка, и др.

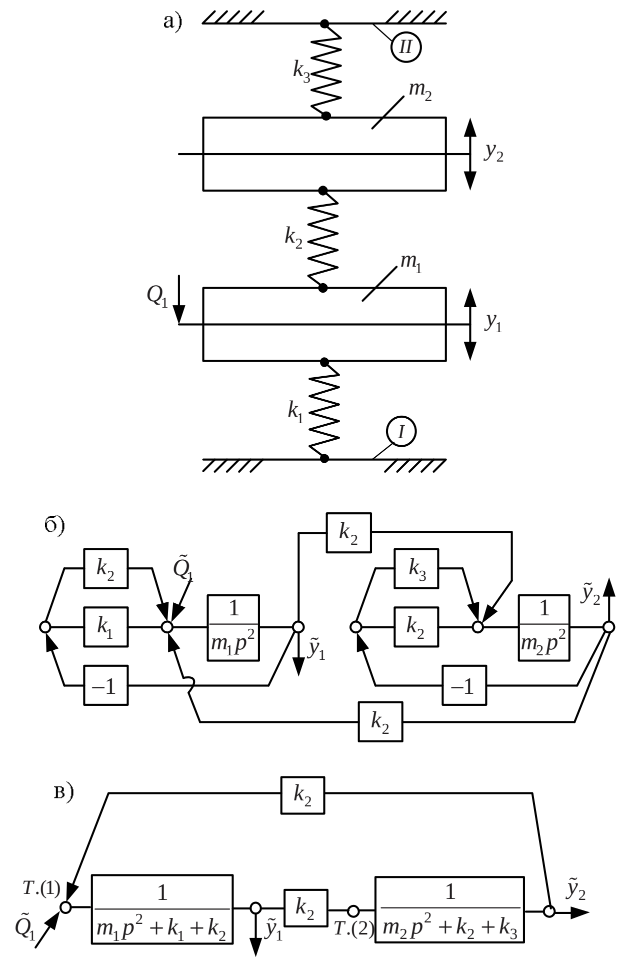


Рис. 1. Расчетная схема (*а*); детализированная (*б*) и обобщенная структурные схемы (*в*) виброзащитной системы с двумя степенями свободы

2. Для механических колебательных систем в их структурных интерпретациях соединения типовых звеньев между собой определяются правилами параллельного и последовательного соединения пружин. Используя эти правила, могут быть построены определенные блоки (компакты) и структуры, состоящие из нескольких типовых элементов. В тех случаях, когда объект защиты от вибраций определен, и виброзащитная система (ВЗС) отображается структурными схемами в виде приведенных на рис. 1 *б* и 1 *в*, преобразования выполняются на основе правил преобразования структурных схем систем автоматического управления. Важным для последующих исследований является то обстоятельства, что типовые элементарные звенья в структурных математических моделях ВЗС, а также структуры или блоки типовых элементов в качестве входного сигнала имеют смещение, а в качестве выходного — силовой фактор (сила).

В такой интерпретации подхода лежит представление о том, что сложные звенья, получаемые соединением типовых элементов в некоторые блоки или структуры, также могут взаимодействовать между собой по тем же правилам, что и типовые элементы.

3. Что касается объекта защиты в структурных интерпретациях ВЗС, то он принимает вид интегрирующего звена второго порядка. При этом на вход такого звена поступает сила, а выходным сигналом является перемещение. Более подробные представления о деталях структурных интерпретаций приведены в работе [25].

Механическая колебательная система (рис. 1 *а*) состоит из двух парциальных систем, каждая из которых определяется своим составом при остановке движения по всем обобщенным координатам [12]. На структурной схеме (рис. 1 *в*) видно, что система в целом состоит из двух парциальных структур, которые имеют между собой межпарциальную упругую связь (звено с передаточной функцией $w_2'(p) = k_2$). Детализированная схема парциальной системы приводится на рис. 1 *б*. Парциальные схемы связаны между собой по принципу обратной связи, то есть выход одной парциальной системы является входным сигналом для другой. Передаточные функции системы соответственно имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \tag{5}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_2}{A(p)}, \tag{6}$$

где:

$$A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \tag{7}$$

Передаточная функция межпарциальных связей определяется выражением:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \tag{8}$$

Задача исследования заключается в развитии представлений о возможностях структурных преобразований механических колебательных систем с выделением в них звеньев обобщенного вида, представляющих собой структурные преобразования из нескольких элементов, при входном сигнале в виде смещения, а при выходном — в виде силы.

Построение математических моделей ВЗС с учетом возможностей соединения типовых элементов. Если рассмотреть расчетную схему ВЗС с одной степенью свободы, как показано на рис. 2 *а*, то динамическое состояние объекта защиты m определяется уравнением движения:

$$m\ddot{y} + y(k_1 + k_2) = Q. \tag{9}$$

Структурная схема системы (рис. 2 *а*) приведена на рис. 2 *б*, *в* с учетом правил формирования обратных связей.

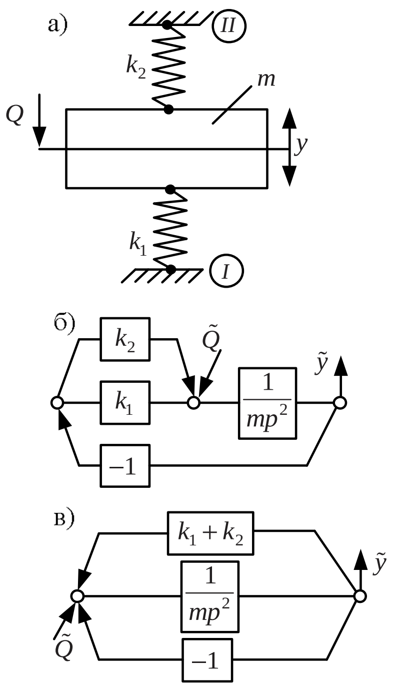


Рис. 2. Система с одной степенью свободы (базовый вариант): *а* — расчетная схема; *б* — детализированная схема; *в* — структурная схема с выделением цепи отрицательной динамической жесткости

Передаточная функция системы с одной степенью свободы (рис. 1 *б*, *в*) имеет вид:

$$W_1'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} = \frac{1}{mp^2 + k_1 + k_2}. \tag{10}$$

Знаменатель (10) представляет собой динамическую жесткость системы:

$$D(p) = mp^2 + k_1 + k_2. \tag{11}$$

Из (11) следует, что частота резонанса, или собственных колебаний, определится выражением:

$$\omega^2_{\text{соб}} = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} = \frac{k_1 + k_2}{m}. \tag{12}$$

Сопоставляя (10) и (12), найдем, что динамическая жесткость системы $D(\omega)$ при частоте из (12) становится равной нулю. Последнее можно интерпретировать таким образом, что динамическая жесткость системы, будучи характеристикой свойств системы, состоит из трех частей и формируется как сумма жесткостей двух упругих элементов k_1, k_2, а также динамической жесткости, формируемой элементом m. Отметим, что k_1 и k_2 не зависят от частоты внешнего воздействия, в то время как элемент m формирует силовой фактор с отрицательной динамической жесткостью «$-m\omega^2$». Сумма динамических жесткостей, таким образом, будет равна нулю. В рассматриваемом случае выражение (11) является характеристическим уравнением, то есть характеристическое уравнение, по своей физической сути, является суммой динамических жесткостей системы, приведенных к точке, в которой приложена сила Q.

Динамическая жесткость системы (рис. 1 *а*), определяется выражением (11); она состоит из двух частей. Одна часть представляет собой блок (или структуру) из двух параллельно соединенных пружин k_1 и k_2. Вторая часть является некоторой формой «особой пружины», реализуемой типовым элементом, относящимся к массоинерционным звеньям m, обладающим свойством создавать динамическую отрицательную жесткость, величина которой зависит от частоты внешнего возмущения. Если динамическая жесткость всей системы при таком рассмотрении равна нулю, то при этом определяется частота собственных колебаний. Таким образом, частота собственных колебаний также приобретает физическое объяснение — это частота колебаний, при которой возможны взаимодействия в системе, сопровождающиеся проявлениями нулевой динамической жесткости.

Что касается отдельных фрагментов системы с несколькими степенями свободы, то аналогичным образом рассматривается динамическая жесткость соответствующей части системы. Такая структура может быть названа квазипружиной. Типовые элементарные звенья, рассмотренные выше — пружины k_1, k_2 и массоинерционный элемент m (и др.), — могут быть соотнесены с понятиями динамической жесткости типовых элементов систем.

В простейших вариантах создания структур или квазипружин, когда составляющие элементы являются только пружинами с постоянными жесткостями, квазипружина приводится к обычному упругому элементу в работе [26]. Такие образования получили также название компактов.

В системе с двумя степенями свободы характеристическое уравнение системы, в соответствии со структурной схемой на рис. 1 *б*, принимает вид

$$mp^2 + k_1 + k_2 - \frac{k_2^2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} = 0, \tag{13}$$

что позволяет предложить графоаналитический метод определения частот собственных колебаний. Введем обозначения для определения динамических жесткостей:

$$D(\omega) = -m_1\omega^2 + k_1 + k_2, \tag{14}$$

$$D_1(\omega) = \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}. \tag{15}$$

С учетом (14), (15) выражение (13) примет вид:

$$D(\omega) = D_1(\omega). \tag{16}$$

Выражение (14), в физическом смысле, отображает динамическую жесткость структурного образования, как это показано на рис. 3. Такое структурное образование (обведено контурами I, II) можно назвать квазипружиной (контур II на рис. 3 соответствует операторной форме записей). Динамическая жесткость квазипружины определяется выражением (15). В рассматриваемом случае динамическая жесткость квазипружины зависит от частоты внешнего воздействия: при ω = 0, $D_1(0)=\dfrac{k_2^2}{k_2+k_3}$, что определяет статическую жесткость квазипружины при частоте, которая соответствует значению:

$$n_2^2=\frac{k_2+k_3}{m_2}, \qquad (17)$$

то есть парциальной частоте системы из элементов m_2, k_2, k_3 (рис. 2 *в*). В свою очередь, для парциальной системы из элементов m_1, k_1, k_2 (рис. 2 *в*) имеем

$$n_1^2=\frac{k_1+k_2}{m_1}. \qquad (18)$$

На рис. 3 показано система, расчетная схема которой приведена на рис. 2 *а*, но в результате преобразований в исходной системе выделена квазипружина (обведена контуром I на рис. 3).

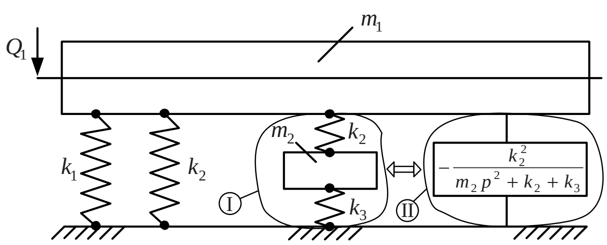
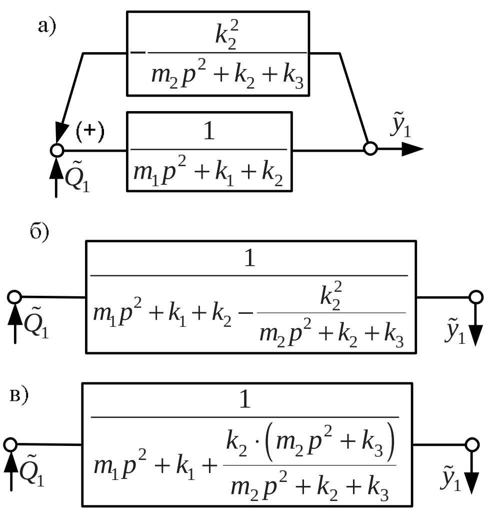


Рис. 3. Принципиальная схема механической колебательной системы с квазипружиной: контур I — квазипружина из элементов m_2, k_2, k_3; контур II — операторная форма квазипружины

Отметим, что в рассматриваемом случае введение квазипружины как составного элемента в параллельное соединение к пружинам k_1 и k_2 приводит к исключению координаты y_2. Такой прием носит условный характер, поскольку квазипружина содержит в своем составе массоинерционный элемент m_2, который принимает участие в формировании динамических свойств системы.

На рис. 4 приведены варианты преобразования структурной схемы (рис. 2 *в*).



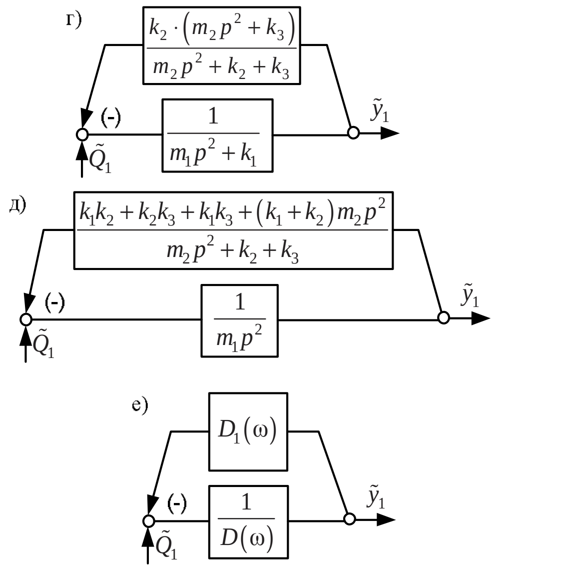


Рис. 4. Варианты форм обратных связей при выделении объекта защиты в виде массоинерционного элементы m_1: *а* — динамическая жесткость квазипружины определяется передаточной функцией межпарциальной связи; *б* — квазипружина в структуре парциальной системы m_1, k_1, k_2; *в* — квазипружина в структуре парциальной системы в приведенном виде; *г* — квазипружина как обратная отрицательная связь по отношению к системе m_1, k_1; *д* — упругая система как обратная отрицательная связь по отношению к объекту защиты m_1

Приведенные выше варианты структурных преобразований показывают возможности квазипружины входить в различные комбинационные связки и соединения с типовыми элементами системы. Таким образом динамическая жесткость квазипружины проявляется в различных формах взаимодействия с другими элементами системы, но это является лишь проявлением динамических свойств фрагментов системы, но не системы в целом.

Отметим, что динамическая жесткость квазипружины из выражения (15) может стать бесконечно большой при частоте внешней силы, совпадающей с парциальной частотой n_2 из выражения (16). В этом случае динамическая жесткость системы в целом становится также бесконечно большой; при этом движение по координате y_1 «обнулится», что соответствует режиму динамического гашения колебания. Последнее следует также из структурных моделей на рис. 4 *а* – *г*, поскольку величина обратной связи становится бесконечно большой. Однако это не означает, что движение по координате y_2 прекратится.

На рис. 5 приведены графики $D(\omega)$, $D_1(\omega)$ и $\dfrac{y_2}{y_1}(\omega)$, из которых следует, что пересечение $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$ определяет частоты собственных колебаний.

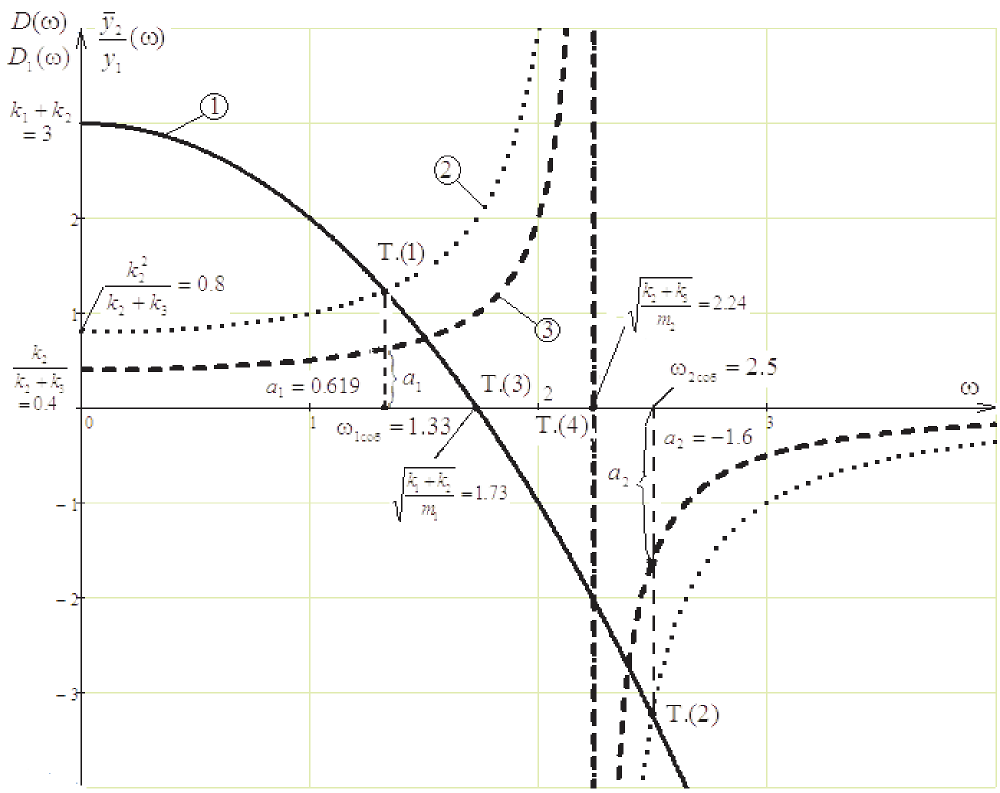


Рис. 5. принципиальная схема определения частот собственных колебаний и отношения амплитуд y_1 и y_2 в зависимости от частоты: кривая 1 — соответствует $D(\omega)$; кривая 2 — соответствует $D_1(\omega)$; кривая 3 — соответствует $\dfrac{\bar{y}_2}{y_1}(\omega)$

При пересечении графиков $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$ (точки (1) и (2)) определяются частоты собственных колебаний.

На графиках 1, 2, 3 (рис. 5) имеется ряд характерных точек. Пересечения графиков $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$ определяют (1) и (2), соответствующие собственным частотам $\omega_{1соб}$ и $\omega_{2соб}$. Точки (3) и (4) (рис. 5) соответствуют парциальным частотам n_1 и n_2. Расположение частот собственных колебаний и парциальных соответствует условию:

$$\omega_{1соб} < n_1 < n_2 < \omega_{2соб}, \qquad (19)$$

что совпадает с известными результатами [27]. В точках (1), (2) ординаты $D(\omega)$ и $D_1(\omega)$ в сумме дают значение динамической жесткости системы, равное нулю. Вместе с тем на этих частотах реализуется режим резонанса. Таким образом, собственные колебания можно рассматривать как режим взаимодействия элементов систем при силе Q_1, приложенной к m_1, при котором сила Q_1 не встречает «сопротивления».

На рис. 5 приведены также точки пересечения графика $\dfrac{y_2}{y_1}(\omega)$ с вертикальными линиями, проходящими через частоты $\omega_{1соб}$ и $\omega_{2соб}$. Определенные значения соотношения, в частности a_1 (в положительной области значений), соответствуют первой форме свободных колебаний, когда элементы m_1 и m_2 одновременно достигают максимальных значений; при этом амплитуды движения по координатам y_1 и y_2 не являются равными и определяются a_1. Аналогичная ситуация возникает на частоте $\omega_{2соб}$. В этом случае вынужденные движения, возбуждаемые силой Q_1, позволяют определить формы свободных колебаний на частоте $\omega_{2соб}$ (вторая форма колебаний); движение по координате y_1 и y_2 происходит в противофазе, а отношение амплитуд будет определяться значением a_2 (т. е. отрицательной величиной).

Более детальная информация о соотношениях амплитуд колебаний приведена в [28]. Важным обстоятельством для дальнейших исследований является то, что соотношения амплитуд, как это следует из графика $\dfrac{y_2}{y_1}(\omega)$ (рис. 5), сохраняются при переходе через частоты резонансных явлений $\omega_{1соб}$ и $\omega_{2соб}$. Частота динамического гашения n_2 в данном случае совпадает с бесконечно большим значением динамической жесткости квазипружины $D_1(\omega)$; одновременно на этой же частоте происходит изменение форм колебаний, то есть переход от совместного движения m_1 и m_2 по координатам y_1 и y_2 к движениям в противофазе.

Особенности движения системы при нулевой динамической жесткости квазипружины. Из предшествующего рассмотрения следует, что квазипружина представляет собой структурное образование, в составе которого находятся массоинерционные элементы. Отметим, что в разделе II квазипружина по своей структуре соответствует, в физических представлениях, парциальной системе m_2, k_2, k_3, то есть набор элементов, входящих в состав квазипружины, определяется теми же элементами, что и в парциальной системе. При этом силовое возмущение непосредственно не прикладывается.

На рис. 4 *а* квазипружина представляет собой обратную отрицательную связь. В этом смысле она соответствует по возможностям соединения упругих элементов k_1 и k_2 в «базовой системе». Если квазипружина соединяется параллельно с упругим элементом k_2, то такое параллельное соединение может также рассматриваться как квазипружина, но более сложного вида. В этом случае динамическая жесткость квазипружины будет определяться выражением:

$$D_1'(\omega) = \frac{k_2 \cdot \left(m_2 p^2 + k_3\right)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \tag{20}$$

Для такой квазипружины возможен режим нулевой динамической жесткости на частоте:

$$\omega_0^2 = \frac{k_3}{m_2}. \tag{21}$$

В этом случае объект защиты (имеется в виду виброзащита) будет опираться на пружину с жесткостью k_1. При этом отношение амплитуд колебаний y_1 и y_2 определится выражением:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_2}{k_2} = 1, \tag{22}$$

то есть элементы m_1 и m_2 будут двигаться таким образом, что деформации пружины k_2 не происходит.

При параллельном присоединении упругого элемента k_1 к квазипружине $D_1'(\omega)$ можно получить квазипружину более общего вида:

$$D_1''(\omega) = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 + (k_1 + k_2)\cdot m_2 p^2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \tag{23}$$

Результаты таких преобразований приведены на рис. 4 *д*. Динамическая жесткость такой (сводной) квазипружины будет равна нулю при частоте:

$$\omega_д^2 = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{(k_1 + k_2)\cdot m_2} = \frac{k_3 + \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}{m_2}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в выражения (8), получим, что:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{k_1 + k_2}{k_2}. \tag{24'}$$

Таким образом, массы m_1 и m_2 будут двигаться «слитно», но амплитуды колебаний по координатам y_1 и y_2 будут различными и определятся выражением (24'). Частота собственных колебаний $\omega_{1соб}$ будет меньше частоты из выражения (24).

Влияние точки приложения внешней силы. Сравнительный анализ динамических свойств упругих элементов и их структурных образований показал, что квазипружины являются структурами, которые формируются с учетом особенностей выбора объекта защиты, расположения приложенных сил и зависят от значений параметров системы. Особенностью квазипружины является ее зависимость от частоты, что предопределяет возможность получения динамических жесткостей отрицательных и положительных значений. Кроме того, динамическая жесткость квазипружины как элемента системы может принимать нулевые и бесконечно большие значения.

Рассматривается случай, когда объект защиты m_1 определяется координатой y_1, а промежуточный массоинерционный элемент m_2 — координатой y_2; при этом внешняя гармоническая сила Q_2 прикладывает к массе m_2. Запишем уравнения движения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - k_2 y_2 = 0, \tag{25}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \cdot (k_2 + k_3) - k_2 y_1 = Q_2. \tag{26}$$

При использовании преобразований Лапласа может быть построена структурная математическая модель такого же вида, как на рис. 1 *в*, но сила Q_2 будет приложена в точке (2), а не в (1), как это принималось ранее.

В этом случае передаточная функция межпарциальных связей принимает вид:

$$w_{21}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}. \tag{27}$$

Приложение внешнего воздействия Q_2 к массе m_2 изменяет форму характеристического уравнения. В этом случае имеем:

$$m_2 p^2 + k_2 + k_3 - \frac{k_2^2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} = 0. \tag{28}$$

На рис. 6 представлена схема определения частот собственных колебаний с учетом мажпарциальных связей, определяемых выражением (27). В данном случае динамические жесткости имеют вид:

$$D'(\omega) = -m_2\omega^2 + k_2 + k_3, \tag{29}$$

$$D_2(\omega) = \frac{k_2^2}{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}. \tag{30}$$

При численном моделировании параметры a_1', a_2' и частоты собственных колебаний совпадают с данными, приведенными в работе [29].

Структурные схемы системы при возмущении Q_2, приложенном к массе m_2, приведены на рис. 7 *а – г*.

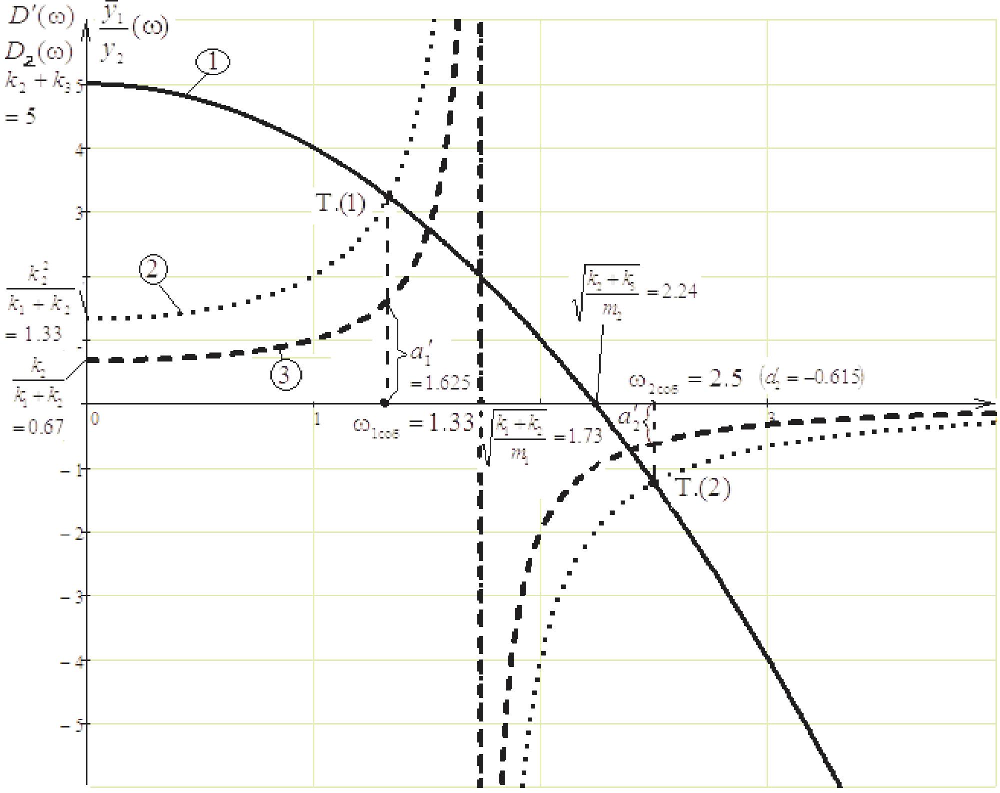


Рис. 6. Принципиальная схема определения частот собственных колебаний и отношения амплитуд y_1 и y_2 в зависимости от частоты: *кривая 1* соответствует $D'(\omega)$; *кривая 2* соответствует $D_2(\omega)$; *кривая 3* соответствует $\frac{\bar{y}_1}{y_2}(\omega)$

Рис. 7. Варианты структурных схем исходной системы при внешней силе Q_2, приложенной к элементу m_2: *а* — структурная схема общего вида с парциальными системами; *б* — выделение парциальной системы с объектом защиты m_1 и эквивалентным переносом внешней силы Q_2; *в* — перевод элемента k_2 в цепь обратной связи по отношению к системе m_2, k_3; *г* — выделение обратной отрицательной связи по отношению к массоинерционному элементу m_2

При рассмотрении структурной схемы (рис. 7 *а*) можно отметить, что при частоте:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k}{m_1}. \tag{31}$$

В системе возможна реализация режима динамического гашения по отношению к массоинерционному элементу m_2.

При рассмотрении структурной схемы системы на рис. 7 *в* можно отметить возможность «обнуления» обратной связи по отношению к системе m_2, k_2 на частоте:

$$\omega_0'^2 = \frac{k_1}{m_1}. \tag{32}$$

В этом случае коэффициент амплитуды колебаний, определяемый из выражения (27), принимает значение

$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=1$; при этом обе массы будут осуществлять движения, где $y_2 - y_1 = 0$, то есть в рассматриваемом режиме упругий элемент не будет деформироваться.

При «обнулении» обратной связи по отношению к массоинерционному элементу m_2 частота составит значение:

$$\omega_{д}'^{2}=\frac{k_1k_2+k_2k_3+k_1k_3}{\left(k_2+k_3\right)\cdot m_1}=\frac{k_1+\dfrac{k_2k_3}{k_2+k_3}}{m_1}. \qquad (33)$$

После подстановки (33) в (27) получим:

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}=\frac{k_2+k_3}{k_2}, \qquad (34)$$

то есть обе массы перемещаются «слитно», но амплитуды движения по координатам y_1 и y_2 будут различными.

Таким образом, динамические жесткости в динамических колебательных системах должны соотноситься с точками приложения внешних сил и структурами, движения которых оцениваются через формы совместных движений элементов системы.

Заключение

Механические колебательные системы с одной и несколькими степенями свободы как расчетные схемы технических объектов, даже в линейных постановках в рассмотрении возможных динамических свойств, обладают особенностями, проявляющимися через совместные движения элементов.

1. В работе предлагается метод построения математических моделей для оценки возможностей выбора и использования совместных движений элементов в различных формах. Метод заключается во введении понятия «квазипружина», которое основано на представлениях о возможностях формирования при определенных правилах структурных образований из типовых элементов или элементарных звеньев.

2. Особенность метода предполагает предварительное построение математической модели в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с последующим использованием преобразовании Лапласа. Последующие этапы связаны с построением структурных математических моделей в виде структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Типовые звенья в структурных схемах интерпретируются как элементы с передаточными функциями усилительных, дифференцирующих и интегрирующих структур. Предлагается методика преобразования структурных схем и создания структурных образований, называемых квазипружинами.

3. Понятие динамической жесткости может быть распространено в рассматриваемую систему «в целом», ее отдельные фрагменты и даже на типовые звенья, если свойства элементов зависят от частоты внешних воздействий.

4. Показано, что при динамической жесткости системы «в целом», равной нулю, при приложении внешней гармонической силы возникает резонанс как физическое явление, соответствующее обнулению динамической жесткости.

5. При рассмотрении режимов, в которых при действии внешнего гармонического возмущения выделяемое структурное образование или квазипружина приобретают нулевую жесткость, возникает специфический режим движения, характеризующийся определенным соотношением амплитуд элементов системы.

6. Предлагается графоаналитический метод определения частот собственных колебаний, основанный на интерпретациях характеристического частотного уравнения как суммы динамических жесткостей, приведенных к одной точке. Такая сумма равна нулю, что предопределяет возможности оценки влияния на распределение собственных частот различных факторов.

7. Сравнительный анализ показывает, что формы самоорганизации движений зависят от выбора мест приложения силовых факторов, хотя общая картина возможных форм взаимодействия сохраняется.

Литература

1. Махутов Н.А., Абросимов Н.В., Гаденин М.М. Обеспечение безопасности – приоритетное направление в области фундаментальных и прикладных исследований // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2013. № 3 (27). С. 46-71.

2. Махутов Н.А. , Петров В.П., Куксова В.И., Москвитин Г.В. Современные тенденции развития научных исследований по проблемам машиноведения и машиностроения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2008. № 3. С. 3-19.

3. Дубровский В.А., Подволоцкая Н.И. Проблемы динамики и прочности исполнительных механизмов и машин // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2008. № 3. С. 35-42.

4. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник: в 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.

5. Вульфсон И.И. Колебания в машинах. СПб.: СПГУТД, 2006. 260 с.

6. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики и элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1998. 288 с.

7. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 496 с

8. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. Мн.:ДизайнПРО, 2004. 640с.

9. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005. 320 с.

10. Harris C.M., Allan G. Shock and Vibration Handbook. USA. Mc Graw-Hill, New-York. 2002. 877 p.

11. Ден-Гартог Д.П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 574 с.

12. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания / под ред. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

13. Ленк А. Электромеханические системы. Системы с сосредоточенными параметрами. М.: Мир, 1978. 283 с.

14. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.

15. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 384 с.

16. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk: ISU, 2006. 315 p.

17. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: ИГУ, 2008. 523 с.

18. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 156 с.

19. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника, 2013. 364 с.

20. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск: Наука, 2014. 357 с.

21. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Упырь Р.Ю. Обобщенная пружина в задачах машин и оборудования // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво): Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка. Полтава: ПолтНТУ, 2009. Т. 1, Вып. 3 (25). С. 79-89.

22. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Ермошенко Ю.В. Методологические подходы в системном анализе и математическом моделировании механических колебательных систем. Иркутск , 2013. 97 с. Деп. в ВИНИТИ 07.02.2013 № 37 – В 2013.

23. Большаков Р.С., Елисеев С.В. Проблемы и направления развития динамики машин: способы и средства вибрационной защиты. Иркутск, 2013. 67 с. Деп. в ВИНИТИ 02.12.2013 № 345 – В 2013.

24. Елисеев С.В., Хоменко А.П., Барсуков С.В. Современные проблемы динамики машин. Защита от вибраций и ударов. Иркутск, 2011. 165 с. Деп. в ВИНИТИ 21.03.2011 № 135 – В 2011.

25. Елисеев С.В., Московских А.О., Большаков Р.С., Савченко А.А. Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики машин [Электронный ресурс] // technomag.edu.ru: Наука и образование: электрон. науч.-техническое изд. 2012. № 6. URL. http:// technomag.edu.ru/doc/378699. html (дата обращения: 10.06.2012).

26. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. Вып. № 4 (36). С. 61-70.

27. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 650 с.

28. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. Реакции связей как параметры динамического состояния колебательной системы // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 1 (25). С. 7-18.

29. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Развитие энергетического метода определения частот свободных колебаний механических систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 1 (49). С. 8-19.

References

1. Makhutov N.A., Abrosimov N.V., Gadenin M.M. Provision of safety - priority of direction in region of fundamental and applied researches // Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast. 2013. № 3 (27). P. 46-71.

2. Makhutov N.A., Petrov V.P., Kuksova V.I., Moskvitin G.V. Modern tendencies of development of science researches on problems of mechanical engineering and theoretical engineering // Engineering and Automation Problems. 2008. № 3. P. 3-19.

3. Dubrovskii V.A., Podvolotskaya N.I. Problems of dynamics and strength of actuating mechanisms and machines // Engineering and Automation Problems. 2008. № 3. P. 35-42.

4. Birger I.A., Panovko Ya.G. Strength. Stability. Oscillations. Handbook in 3 v. V. 1. M.: Mashinostroenie, 1968. T. 1. 831 p.

5. Vul'fson I.I. Oscillation in machines: SPb.: SPGUTD, 2006. 260 p.

6. Shapovalov L.A. Modeling in tasks of mechanics and elements of constructions. M.: Mashinostroenie, 1998. 288 p.

7. Zarubin B.C. Mathematical modeling in technics: M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2010. 496 p.

8. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems: Mn.:DizainPRO, 2004. 640 p.

9. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. M.: Fizmatlit, 2005. 320 p.

10. Harris C.M., Allan G. Shock and Vibration Handbook. USA. Mc Graw-Hill, New-York. 2002. 877 p.

11. Den-Gartog D.P. Mekhanicheskie kolebaniya. M.: Fizmatgiz, 1960. 574 p.

12. Tsze F.S., Morze I.E., Khinkl R.T. Mechanical oscillations / pod red. I.F. Obraztsova. M.: Mashinostroenie, 1966. 508 p.

13. Lenk A. Electromechanical systems. Systems with the concentrated parameters. M.: Mir, 1978. 283 p.

14. Druzhinskii I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroenie, 1977. 240 p.

15. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronics approaches in dynamics of mechanical oscillatory systems. Novosibirsk: Nauka, 2011. 384 p.

16. Eliseev S.V., Lukyanov A.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Dynamics of mechanical systems with additional ties. Irkutsk: ISU, 2006. 315 p.

17. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in the generalized problems of vibroprotection and a vibration insulation of technical objects. Irkutsk: IGU, 2008. 523 p.

18. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Couplings of links in dynamics of mechanical oscillation systems. Irkutsk: IrGUPS, 2012. 156 p.

19. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Applied tasks of the structural theory of vibroprotective systems. SPb.: Politekhnika, 2013. 364 p.

20. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Dynamical absorbtion of oscillations: concept of feedback tie and structural methods of mathematical modelling. Novosibirsk: Nauka, 2014. 357 p.

21. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Upyr' R.Yu. Generalized spring is tasks of protection of machines and equipment // Zbirnik naukovikh prats' (galuzeve mashinobuduvannya, budivnitstvo): Poltavs'kii natsional'nii tekhnichnii universitet imeni Yuriya Kondratyuka. Poltava: PoltNTU, 2009. T. 1, Vyp. 3 (25). P. 79-89.

22. Eliseev S.V., Artyunin A.I., Ermoshenko Yu.V. Methodological approaches in system analysis and mathematical modeling of mechanical oscillation systems. Irkutsk, 2013. 97 p. Dep. v VINITI 07.02.2013 № 37 - V 2013.

23. Bol'shakov R.S., Eliseev S.V. Problems and direction of development of machines dynamics: approaches and means of vibration protection. Irkutsk, 2013. 67 p. Dep. v VINITI 02.12.2013 № 345 - V 2013.

24. Eliseev S.V., Khomenko A.P., Barsukov S.V. Modern problems of machines dynamics. Protection from vibrations and impacts. Irkutsk, 2011. 165 p. Dep. v VINITI 21.03.2011 № 135 - V 2011.

25. Eliseev S.V., Moskovskikh A.O., Bol'shakov R.S., Savchenko A.A. Possibilities of integration of methods of chains theory and automation control theory in tasks of machines dynamics [Elektronnyi resurs] // technomag.edu.ru: Nauka i obrazovanie: elektron. nauch.-tekhnicheskoe izd. 2012. № 6. URL. http:// technomag.edu.ru/doc/378699. html (data obrashcheniya: 10.06.2012).

26. Eliseev S.V., Kovyrshin S.V., Bol'shakov R.S. Features of creature of compacts of elastical elements in mechanical oscillation systems. Interactions with system elements and connection forms // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2012. Vyp. № 4 (36). P. 61- 70.

27. Babakov I.M. Oscillations theory. M.: Nauka, 1968. 650 p.

28. Belokobyl'skii S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B., Bol'shakov R.S., Nguen D.Kh. Responses of ties as parameters of dynamical condition of oscillation systems // Systems. Methods. Technologies. 2015. № 1 (25). P. 7-18.

29. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Development of energetical method of identification of frequencies of own oscillations of mechanical systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016. № 1 (49). P. 8-19.

УДК 531.3:007, 534.014, 621.752.2, 629, 62.752, 621:534.833; 888.6, 656.2 DOI: 10.18324/2077-5415-2016-2-17-26

Некоторые вопросы формирования структуры вибрационного поля вибростенда: особенности системы измерения, средства настройки

А.В. Елисеев[1 a], И.С. Ситов[2 b], Д.Х. Нгуен[1 c]

[1, 3]Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
[2]Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a]eavsh@ya.ru, [b]sitov@ya.ru, [c]huynhnd1987@gmail.com
Статья поступила 29.04.2016, принята 6.05.2016

В последнее время вибрационное взаимодействие используется для разработки новых технологических процессов, в которых необходимое качество продукции обеспечивается за счет формирования структуры вибрационного поля сыпучей среды. Характеристики рационального вибрационного процесса определяются особенностями динамического взаимодействия гранулированной сыпучей среды с вибрирующей поверхностью рабочего органа и обрабатываемой деталью с учетом неудерживающих связей. Для управления вибрационным технологическим процессом необходимы устройства для фиксации свойств рабочей гранулированной среды и варьирования вибрационного поля, ориентированные не на индивидуальные формы движения, а на регистрацию интегральных свойств динамического взаимодействия элементов гранулированной сыпучей рабочей смеси. В статье рассмотрены вопросы разработки математических моделей на основе интегральных свойств поведения рабочей среды. Предложены специальные датчики, составляющие измерительную базу регистрации динамических состояний рабочей среды. Разработан обобщенный подход для задач динамического синтеза вибрационных технологий, основанный на развитии аналитического метода функции зазора. Представлены устройства средств измерения характеристик вибрационного поля для регистрации признаков неоднородности. Предложены подходы к построению систем вибрационного возмущения рабочей сыпучей среды в однородном вибрационном поле. Предложена система регуляризации структуры вибрационного поля на основе использования устройства для преобразования движения и путем изменения массоинерционных характеристик рабочего органа технологической машины.

Ключевые слова: механическая система; неудерживающие связи; функция зазора; вибрационное взаимодействие; вибрационное поле; устройство преобразования движения; датчик; гранулированная среда.

Some points of structure formation of a vibration field of a shaker unit: measurement and configuration

A.V. Eliseev[1 a], I.S. Sitov[2 b], D.H. Nguen[1 c]

[1,3]Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevskiy St., Irkutsk, Russia
[2]Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a]eavsh@ya.ru, [b]sitov@ya.ru, [c]huynhnd1987@gmail.com
Received 29.04.2016, accepted 6.05.2016

Vibration interaction has recently been used for development of new technological processes. In such processes quality of production is provided due to formation of the structure of a vibration field of granular medium. Characteristics of rational vibration process are defined by features of dynamic interaction of the granulated medium with vibrating surface of a working body and the surface under processing, taking unilateral constrains into consideration. To control vibration technological process, devices are necessary for fixing the properties of the working granulated medium and varying the vibration field. The devices have to be focused not on fixing of individual movement forms, but on registration of integrated properties of dynamic interaction of elements in the granulated medium. The article deals with the points of development of mathematical models on the basis of integrated properties of behavior of a working medium. Special sensors of dynamic conditions of a working granular medium have been offered. The generalized approach for problems