

УДК 621.539.3

Разработка иерархии конечных элементов с переменным числом узлов на ребрах для исследования напряженно-деформированного состояния объектов машиностроения

С.Ю. Трутаев^a, В.В. Трутаева^b

ОАО «ИркутскНИИХиммаш», ул. Академика Курчатова 3, Иркутск, Россия

^astas@himmash.irk.ru, ^bhimmash@irk.ru

Статья поступила 6.05.2014, принята 14.08.2014

Рассмотрены используемые в настоящее время различные подходы к формированию конечно-элементных моделей для исследования напряженного и деформированного состояния технологического оборудования в рамках проектирования новых и реконструкции существующих производственных объектов химического и нефтегазового машиностроения. Рассмотрена разработанная авторами иерархия конечных элементов для оптимального проектирования объектов машиностроения и, в частности, бугельных разъемных соединений, эксплуатируемых на нефтехимических, нефтеперерабатывающих и нефтегазовых производствах. Иерархия конечных элементов представлена семейством объемных конечных элементов – параллелепипед, тетраэдр, призма, пирамида, гибриды. Показано, что при расчете машиностроительных изделий сложной формы для получения оптимальных с точки зрения качества генерируемой конечно-элементной сетки и минимизации времени расчета результатов в ряде случаев целесообразно применение в одной расчетной схеме объемных конечных элементов различных топологических типов. Для этого в разработанной иерархии объемных конечных элементов предусмотрена возможность использования элементов с линейной, квадратичной и кубической аппроксимацией границ. Для обеспечения возможности корректного применения в одной конечно-элементной модели конечных элементов различных топологических типов в статье представлено доказательство совместности функций формы на смежных границах при стыковке элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, функции формы, объемный конечный элемент, топология.

Development of a hierarchy of finite elements with variable number of nodes on the edge to investigate stress-strain state of engineering equipment

S.Yu. Trutaev^a, V.V. Trutaeva^b

JSC «Irkutsk Scientific Research Institution of Chemical Machinery», 3 Academician Kurchatov St., Irkutsk, Russia

^astas@himmash.irk.ru, ^bhimmash@irk.ru

Received 6.05.2014, accepted 14.08.2014

The article deals with various approaches to formation of finite-element models to study stress and strain state of engineering equipment within designing new and reconstructing existing production facilities of chemical and petroleum engineering. Authors have developed a hierarchy of finite elements to design engineering facilities in an optimum way, and hub detachable contact joints operated in petrochemical, oil refining and oil and gas industries, in particular. The hierarchy of the finite elements has been presented as the population of volumetric finite elements such as a parallelepiped, a tetrahedron, a prism, a pyramid, and a hybrid. To get optimal results (according to the quality of generated finite element grid and the minimization of the calculation time) and when calculating engineering equipment with complex shapes, in some cases it makes sense to use volumetric finite elements of different topological types in one design scheme. For this purpose, the hierarchy of volumetric finite elements allows using components with linear, quadratic and cubic approximation of boundaries. To enable the correct use of different topological types in one finite element model, the article presents the proof of consistency of the shape functions at the adjacent boundaries when matching elements.

Keywords: method of finite elements, stress-strain state, shape function, volumetric finite element, topology.

Введение. Сегодня, в связи с развитием компьютерных технологий, все большее значение приобретает возможность исследования конструкций с учетом трехосного напряженно-деформированного состояния (НДС). Такой подход особенно важен при проектировании производственных объектов химического и неф-

тегазового машиностроения, оборудование которых эксплуатируется при высоких давлениях и температурах в присутствии агрессивных и взрывопожароопасных сред.

При решении задач определения НДС объемных деталей методом конечных элементов (МКЭ) использу-

ются различные подходы к формированию конечно-элементных моделей. При этом при формировании моделей применяются КЭ различных типов. В литературе можно найти описание одномерных [1, 2], двумерных [1 – 4] и трехмерных конечных элементов [1 – 4]. Самым распространенным типом конечного элемента (КЭ), применяемым при создании трехмерных моделей, является шестигранный конечный элемент [4]. Такой КЭ, как правило, применяется для моделирования деталей регулярной формы, например, при построении КЭ моделей толстостенных трубопроводов, сосудов, аппаратов и т. д.

В случае необходимости моделирования более сложных конструкций задача в значительной степени усугубляется, так как даже при небольшом усложнении конструктивного исполнения моделируемой детали построить ее конечно-элементную модель с использованием только шестигранных конечных элементов уже не представляется возможным.

Таким образом, возникает необходимость наличия в арсенале применяемого расчетного программного комплекса некой иерархии объемных КЭ, использование которой позволит пользователю синтезировать конечно-элементные модели деталей любой сложной формы [5]. Такую иерархию КЭ математически можно получить, например, путем вырождения узлов параллелепипеда («кирпич») или путем введения отдельных типов КЭ элементов (рис. 1).

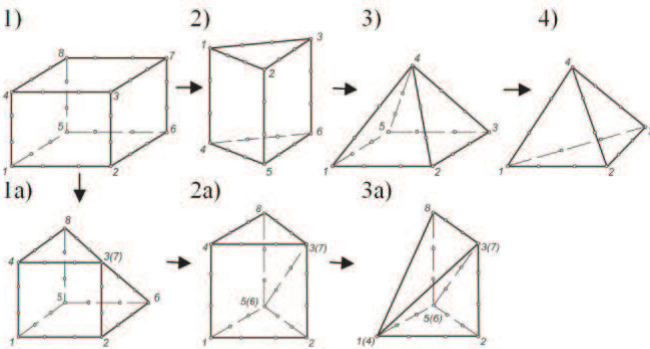


Рис. 1. Иерархия объемных конечных элементов: 1 – параллелепипед; 1а, 2а, 3а – элементы, полученные совмещением (вырождением) узлов; 2 – треугольная призма; 3 – четырехугольная пирамида; 4 – тетраэдр

Как правило, в инженерной практике при выполнении расчетов методом конечных элементов стараются избегать использовать КЭ с линейной аппроксимацией границ, так как это дает приемлемые результаты только для относительно простых с точки зрения геометрии объектов. Для обеспечения же инженерной точности расчетов требуется применение КЭ с высокой степенью аппроксимирующей полиномов (квадратичные или кубические КЭ). При этом следует отметить, что разбивка всей детали конечными элементами высокой степени аппроксимации не всегда рациональна, так как это в значительной степени увеличивает объем вычислений и снижает скорость программных расчетов.

Обычно сгущение сетки или повышение степени аппроксимации требуется на поверхности (граничной области), т. е. там, где возникает наибольший градиент напряжений.

Следовательно, для уменьшения объема вычислений без снижения точности расчета целесообразно применение КЭ с более высокой степенью аппроксимации только на поверхностном слое (граничной области), а при удалении от поверхности использовать элементы с более низкой степенью аппроксимации.

Добиться хорошего компромисса между точностью выполняемых расчетов и их производительностью можно и другими путями. Например, достаточно эффективно может применяться способ, связанный с регулированием плотности конечно-элементной сетки в различных областях детали – сгущением сетки в зонах концентрации напряжений, в галтелях переходах, в окрестностях отверстий и изменении толщин и т. д.

Для ряда случаев оптимальным способом построения конечно-элементной модели является способ комбинации в одной модели КЭ различной формы. Так, например, при исследовании напряженно-деформированного состояния бугельного соединения (рис. 2) методом конечных элементов разбивку цилиндрической части бугеля целесообразно выполнять КЭ в виде параллелепипедов, а «ушей» бугеля – тетраэдрами или треугольными призмами в сочетании с параллелепипедами.

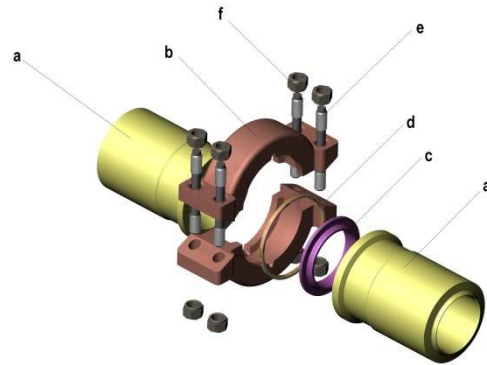


Рис. 2. Бугельное разъемное соединение: а – фланец, b – бугель, с – уплотнительное кольцо, d – ограничитель, e – шпилька, f – гайка

При стыковке КЭ различной формы в одной модели возникает проблема использования топологически совместимых элементов. Для этого необходимо, чтобы перемещения вдоль границ, соединяющих различные элементы с родственной гранью (стороной), были непрерывны (т. е. функции формы на границах, разделяющих элементы, были полностью совместимы).

Рассмотрим стыковку треугольного и четырехугольного КЭ с квадратичной аппроксимацией границ.

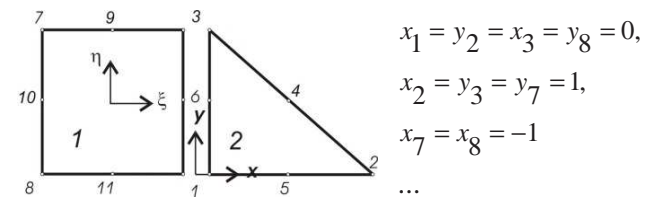


Рис. 3. Треугольный квадратичный КЭ (2) и четырехугольный квадратичный КЭ (1) с общей границей

Для двумерных элементов перемещения u, v являются функциями координат x, y . Поэтому, выразив в квадратичном треугольном элементе (рис. 3) перемещения u, v через полные квадратичные полиномы [2], получим:

$$u = a_1 + a_4x + a_6y + a_2x^2 + a_3y^2 + a_5xy. \quad (1)$$

Аналогичным образом находим v .

Представив в матричном виде u для всех узлов треугольного элемента (рис. 3), получим:

$$\begin{cases} \{u\} = [x] \cdot \{a\} \\ \{a\} = [x]^{-1} \cdot \{u\}, \end{cases} \quad (2)$$

где $[x]$ – матрица полиномиальных функций, $\{a\}$ – вектор обобщенных координат.

Подставляя (2) в (1), получим:

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6, \quad (3)$$

где N_i – функции формы.

В общем виде перемещения, выраженные через функции формы, можно записать как:

$$u = \sum_{i=1}^q N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q N_i v_i, \quad (4)$$

где u, v – перемещение любой точки элемента в локальных координатах соответственно по осям x, y , а u_i, v_i – соответствующее смещение узлов.

Для границы 1-3 формула (3) имеет следующий вид:

$$u = N_1u_1 + N_3u_3 + N_6u_6. \quad (5)$$

Так как для квадратичного четырехугольного элемента перемещения u, v получаются аналогично треугольному элементу и равны (4), то для доказательства межэлементной непрерывности перемещений на границе двух разнородных элементов, в частности на границе 1-3 треугольного и четырехугольного элемента (рис. 3), необходимо, чтобы функции формы обоих элементов на границе были равны, т. е.:

$$N_1(1) = N_1(2); \quad N_6(1) = N_6(2); \quad N_3(1) = N_3(2) \quad (6)$$

где в скобках указан номер элемента.

Функции формы треугольного квадратичного элемента равны (рис. 4 а):

$$N_1(2) = L_1(2L_1 - 1); \quad (7)$$

$$N_6(2) = 4L_1L_3;$$

$$N_3(2) = L_3(2L_3 - 1),$$

где $L_3 = 1 - L_1 - L_2$, на границе 1-3 $L_2 \equiv 0$.

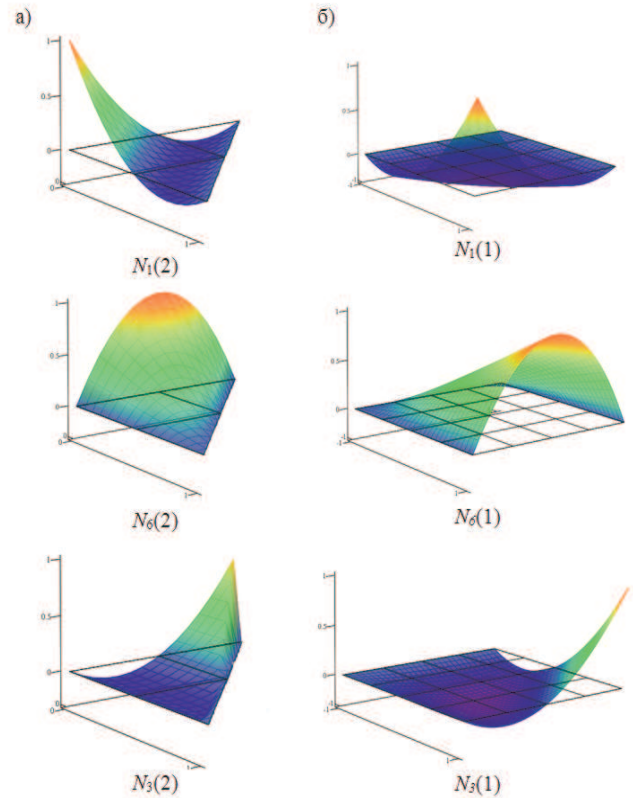


Рис. 4. Функции формы треугольного (а) и четырехугольного (б) квадратичных элементов

Следовательно:

$$L_1 + L_3 = 1. \quad (8)$$

Функции формы четырехугольного квадратичного элемента (рис. 4 б) с учетом, что на границе 1-3 $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} N_1(1) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) = \frac{1}{2}\eta(\eta-1); \\ N_3(1) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) = \frac{1}{2}\eta(\eta+1); \\ N_6(1) &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) = 1-\eta^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Получим зависимость между локальными координатами элементов 1 и 2 (рис. 3). Для элемента 2 (рис. 5) относительные координаты равны:

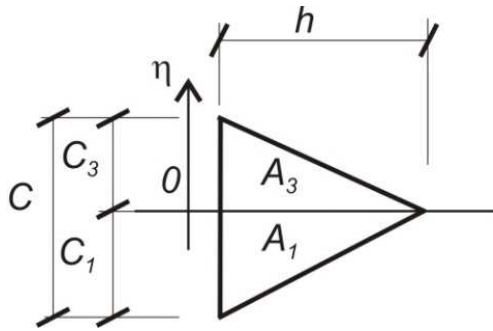


Рис. 5. Локальная система координат

$$L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{C_3 h}{Ch} = \frac{C_3}{C}; L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{C_1 h}{Ch} = \frac{C_1}{C}, \quad (10)$$

где C_3, C_1 равны:

$$C_3 = \frac{(1+\eta)}{2} \cdot C; C_1 = \frac{(1-\eta)}{2} \cdot C. \quad (11)$$

Поэтому зависимость между локальными координатами элементов 1 и 2 равна:

$$\eta = 1 - 2L_1 = 2L_3 - 1. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), получим:

$$N_1(1) = L_1(2L_1 - 1); N_2(1) = L_3(2L_3 - 1). \quad (13)$$

Принимая во внимание (8):

$$N_6(1) = 4L_1 L_3. \quad (14)$$

Так как полученные выражения (13)-(14) для четырехугольного элемента полностью совпадают с выражениями (7) для треугольного элемента, то, следовательно, условие непрерывности (6) выполняется. Поэтому функции формы элемента 1 и элемента 2 полностью совместимы на границе, разделяющей их (сторона 1-3).

Аналогично получаются соотношения для объемных конечных элементов. Рассмотрим тетраэдральный и призматический конечные элементы с переменным числом узлов (рис. 6) и с общей границей 1-2.

Функции формы элемента 1, с учетом $L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$ и $L_3 \equiv 0$ на границе 1-2, будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} N_1(1) &= L_1(1 - 2L_2); \\ N_5(1) &= 4L_1 L_2; \\ N_2(1) &= L_2(2L_2 - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Функции формы элемента 2, с учетом (12), $L_3 \equiv 0$ на границе 1-2 и $\eta = 1$, равны:

$$\begin{aligned} N_1(2) &= \frac{1}{4} L_1(1+\eta) \left[(2-4L_2) + \frac{9}{8}(1-\eta) \cdot (1+9\eta) \right] = L_1(1-2L_2); \\ N_5(2) &= 2L_1 L_2(1+\eta) = 4L_1 L_2; \\ N_2(2) &= \frac{1}{2} L_2(1+\eta)(1-2L_1) = L_2(2L_2 - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Исходя из вышеизложенного, можно прийти к выводу, что элементы 1-4 (рис. 1), а также двумерные элементы, независимо от количества промежуточных узлов на ребрах, являются типологически совместимыми.

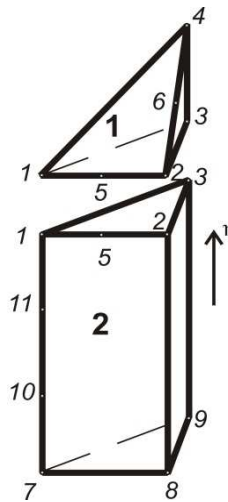


Рис. 6. Тетраэдральный КЭ (1) и призматический КЭ (2) с общей границей (узлы 1-2)

Выводы

1. Предложена иерархия КЭ, требуемая для программного расчета объемного напряженно-деформированного состояния деталей сложной формы;
2. Представлено доказательство топологической совместимости различных КЭ, что позволяет генерировать оптимальные расчетные модели на основе сочетания КЭ любого типа.

Литература

1. Рапопорт Г.Н., Солин Ю.В., Гривцов С.П. Автоматизированные системы управления технологическими процессами. М.: Машиностроение, 1997. 246 с.
2. Кудряшов Е.А., Емельянов С.Г., Яцун Е.И. и др. Нормирование точности в машиностроении. Старый Оскол: ТНТ, 2012. 440 с.
3. Смирнов И.М., Кудряшов Е.А. Эффективная работа инструмента из композита при скоростном фрезеровании резьбы // Обработка металлов: сб. ст. Новосибирск, 2013. № 2 (59). С. 25-32.

4. Кудряшов Е.А., Емельянов С.Г., Яцун Е.И., Павлов Е.В. Технологическое оснащение процессов изготовления конструктивно сложных деталей: моногр. Старый Оскол: ТНТ, 2013. 268 с.

References

1. Rapoport G.N., Solin Yu.V., Gritvov S.P. Automated control systems of technological processes. M.: Mashinostroenie, 1997. 246 p.

2. Kudryashov E.A., Emelyanov S.G., Yatsun E.I. Rationing precision engineering: a tutorial. Staryi Oskol: TNT, 2012. 440 p.

3. Smirnov I.M., Kudryashov E.A. Effective tool of the composite at high speed thread milling // Obrabotka metallov: sb. st. Novosibirsk, 2013. № 2 (59). P. 25-32.

4. Kudryashov E.A., Emelyanov S.G., Yatsun E.I., Pavlov E.V. Technology of manufacturing processes structurally complex parts: monograph. Staryi Oskol: TNT, 2013. 268 p.

УДК 621.9

Поиск оптимальных решений при проектировании процессов механической обработки

Е.А. Кудряшов^a, И.М. Смирнов^b, А.Е. Лебединский^c

Юго-Западный государственный университет, ул. 50-летия Октября 94, г. Курск

^akea-swsu@list.ru, ^bpochta@oaoniii.ru, ^clord47@yandex.ru

Статья поступила 16.06.2014, принята 19.08.2014

Рассмотрены направления повышения точности обработки, в том числе: обеспечением высокой точности изготовления и сборки отдельных элементов технологической системы, повышением ее жесткости и надежности в эксплуатации; оптимизация факторов управления показателями качества технологического процесса; разработка систем автоматизированного управления точностью обработки резанием. Приведен пример основных взаимосвязанных условий оптимизации технологического процесса изготовления деталей: сочетание заданной точности обработки, высокой производительности и минимально возможной себестоимости. Дана характеристика процессов лезвийной обработки, согласно которой любой из них следует рассматривать как интеграцию отдельных этапов. При этом следует учитывать, что в зависимости от конкретных производственных условий практически любая операция технологического процесса может быть реализована различными способами. Рассмотрена задача оптимизации условий резания в рамках технологической операции, которая сводится к оптимизации функционирования сформированной модели технологического процесса.

Ключевые слова: показатели качества, технологический процесс, оптимизация, механическая обработка деталей.

Search of ultimate solutions in the design of machining processes

E.A. Kudryashov^a, I.M. Smirnov^b, A.E. Lebedinsky^c

Southwest State University, 94, 50th Anniversary of October St., Kursk, Russia

^akea-swsu@list.ru, ^bpochta@oaoniii.ru, ^clord47@yandex.ru

Received 16.06.2014, accepted 19.08.2014

The article considers some direction of how the accuracy of processing can be improved, including ensuring high accuracy of manufacturing and assembly of individual elements of technological system, improving its inflexibility and reliability in operation; optimization of the factors of the quality for technological process, development of automatic control systems for the accuracy of machining cutting. The authors give an example of basic interrelated conditions for optimization of the process of manufacturing parts: it is a combination of processing accuracy given and high performance with the lowest possible prime cost. The article also observes the feature of the blade machining processes when each process should be regarded as an integration of individual stages. However, it should be taken into account that depending on the specific production conditions almost any operation in technological process can be implemented in various ways. This article relates to the problem of optimizing cutting conditions in technological operations, which is reduced to optimization of how the model, formed by technological process, operates.

Keywords: quality indexes, technological process, optimization, part machining.

Введение. В технологии машиностроения и, в частности, при обработке резанием наиболее распростра-

нены два направления повышения точности обработки. Первое связано с обеспечением высокой точности из-