

УДК 621.01:621.891

## Особенности контакта жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством при разгрузке\*

П.М. Огар<sup>а</sup>, В.А. Тарасов<sup>б</sup>, Д.Б. Горохов<sup>с</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>а</sup>ogar@brstu.ru, <sup>б</sup>TV-post@yandex.ru, <sup>с</sup>denis\_gorohov@mail.ru

Статья поступила 15.06.2014, принята 20.08.2014

*В статье исследован вопрос об изменении относительной площади контакта при снижении нагрузки, приложенной к стыку шероховатых поверхностей. Изначально рассмотрено внедрение жесткой шероховатой сферы (индентора) в упругопластическое упрочняемое полупространство, а также упругое восстановление отпечатка при разгрузке. При описании упругопластического материала использован степенной закон Холломона (Hollomon's power law). Площадь контакта при упругом восстановлении определена с учетом эффектов «sink-in/pile-up». Для описания контакта жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством использована дискретная модель шероховатой поверхности. Микронеровности представлены в виде набора одинаковых сферических сегментов, распределение которых по высоте соответствует опорной кривой профиля реальной шероховатой поверхности. При описании опорной кривой использовано распределение неполной бета-функции. Параметры опорной кривой определены через высотные параметры шероховатости согласно стандарту ISO 4281/1-1997. Получены зависимости безразмерного силового упругогеометрического параметра  $F_q$  от относительной величины внедрения  $\varepsilon$  при нагружении и аналогичного параметра  $F_{qe}$  от величины  $\varepsilon - \Delta\varepsilon$  при разгрузке. Показаны зависимости относительных площадей контакта  $\eta$  и  $\eta_e$  от безразмерных нагрузок  $F_q$  и  $F_{qe}$  при нагружении и разгрузке для разных значений экспоненты упрочнения  $n$  и параметра  $\varepsilon_y = \sigma_y / E^*$ , где  $\sigma_y$  – предел текучести,  $E^*$  – контактный модуль упругости. Полученные результаты имеют практическое значение для прогнозирования эксплуатационных показателей неподвижных соединений деталей машин на стадии проектирования, в частности при обеспечении герметичности фланцевых соединений и затворов сосудов высокого давления.*

**Ключевые слова:** шероховатая поверхность, упругопластическое полупространство, степенной закон Холломона, разгрузка, упругое восстановление отпечатка, относительная площадь контакта.

## Some peculiarities of a contact of a rigid rough surface with elastoplastic half-space under load relief

P.M. Ogar<sup>а</sup>, V.A. Tarasov<sup>б</sup>, D.B. Gorohov<sup>с</sup>

Bratsk State University, 40 Makarenko St., Bratsk, Russia

<sup>а</sup>ogar@brstu.ru, <sup>б</sup>TV-post@yandex.ru, <sup>с</sup>denis\_gorohov@mail.ru

Received 15.06.2014, accepted 20.08.2014

*The article deals with the issue of relative area change under decrease of a load applied to the joint of rough surfaces. Indentation of a rigid rough sphere (indenter) into elastoplastic hardenable half-space has been considered. Dint elastic recovery under load relief has also been considered. When describing elastoplastic material, Hollomon's power law has been used. Contact area in the elastic recovery has been defined with taking into account the effects of «sink-in / pile-up». To describe a contact of a rigid rough surface with elastoplastic half-space a discrete model of a rough surface has been used. Microroughnesses have been shown as a set of identical spherical segments, distribution in altitude of which corresponds to bearing profile curve of a real surface. To describe the bearing profile curve, incomplete beta function of distribution has been used. Parameters of the bearing profile curve have been defined by means of altitude roughness parameters according to the standard ISO 4281/1-1997. The dependence of the dimensionless force elasto-geometric parameter  $F_q$  on a relative coefficient of indentation  $\varepsilon$  under loading and the dependence of analogous parameter  $F_{qe}$  on coefficient of  $\varepsilon - \Delta\varepsilon$  under load relief have been received. The dependencies of relative contact areas  $\eta$  and  $\eta_e$  on dimensionless loads  $F_q$  and  $F_{qe}$  under loading and load relief have been given for various values of the hardening exponent  $n$  and the parameter  $\varepsilon_y = \sigma_y / E^*$  (where  $\sigma_y$  is a yield strength,  $E^*$  is a contact elastic modulus). The findings are of practical importance for the performance prediction of fixed joints of machine elements at the design stage and, in particular, for tightness supply of flange couplings and the seals of high pressure vessels.*

**Keywords:** rough surface, elastoplastic half-space, Hollomon's power law, load relief, dint elastic recovery, relative contact area.

\* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки по проекту № 1754.



$$m = \frac{3 - 2c^2 \bar{h}_m}{2 - c^2 \bar{h}_m}, \quad (7)$$

где  $\bar{h}_m = h_m/R$ ,  $R$  – радиус сферы;  $c^2 = h_c/h$ ,  $h_c$  – глубина, на которой происходит контакт индентора с материалом под нагрузкой  $P_m$ .

Вопрос определения площади контакта при упругом восстановлении рассматривался в работе [15], однако автором не были учтены эффекты «sink-in / pile-up». При нагружении до контактной глубины  $h_e^*$  (рис. 2) последующее упругое восстановление будет  $h_e - h_f$ ,

аналогично при нагружении до контактной глубины  $h_c$  упругое восстановление будет  $h_m - h_f$ . Сделаем допущение, что имеет место пропорция:

$$\frac{h_e^*}{h_e - h_f} = \frac{h_c}{h_m - h_f}, \quad (8)$$

тогда:  $h_e^* = h_c \frac{h_e - h_f}{h_m - h_f}$ ,  $h_f \leq h_e \leq h_m$ . (9)

При  $h_e = h_f$  имеем  $h_e^* = 0$ , при  $h_e = h_m$  имеем  $h_e^* = h_c$ , т. е. граничные условия выполняются.

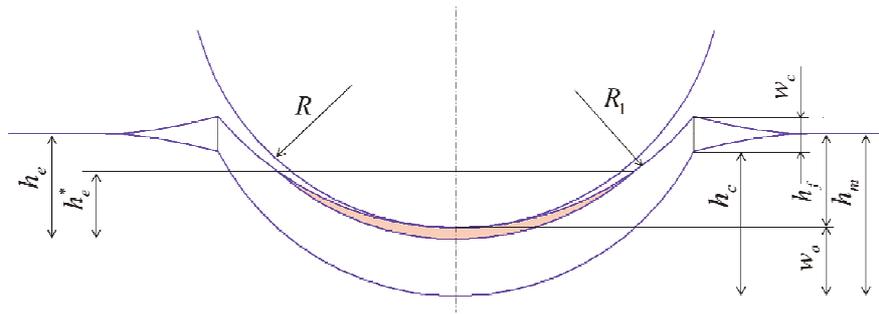


Рис. 2. Схема упругого восстановления отпечатка при разгрузке сферического индентора

Площадь контакта при восстановлении отпечатка:

$$A_e = \pi a_e^2 = 2\pi R h_e^*. \quad (10)$$

**Контакт жесткой шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством.** Воспользуемся дискретной моделью шероховатости, в которой микронеровности представлены в виде набора одинаковых сферических сегментов, распределение которых по высоте соответствует опорной кривой профиля реальной поверхности [1]. Для описания опорной кривой используем распределение неполной бета-функции:

$$\eta(\epsilon) = \frac{B_\epsilon(p, q)}{B(p, q)}, \quad (11)$$

где  $B_\epsilon(p, q)$ ,  $B(p, q)$  – соответственно неполная и полная бета-функции:

$$p = \left( \frac{R_p}{R_q} \right)^2 \left( \frac{R_{\max} - R_p}{R_{\max}} \right) - \frac{R_p}{R_{\max}}, \quad q = \alpha \left( \frac{R_{\max}}{R_p} - 1 \right); \quad (12)$$

$R_p$ ,  $R_q$ ,  $R_{\max}$  – высотные параметры шероховатости согласно стандарту ISO 4281/1–1997.

В этом случае плотность функции распределения неровностей по высоте:

$$\phi'_n(u) = \frac{u^{\alpha-2}(1-u)^{\beta-2}[(p-1)(1-u) - (q-1)u]}{\epsilon_s^{\alpha-1}(1-\epsilon_s)^{\beta-1}}, \quad (13)$$

где  $\epsilon_s$  определяется из условия  $\phi_n(\epsilon_s) = 1$  [1].

Геометрические параметры сферического сегмента: высота  $\omega R_{\max}$ , где  $\omega = 1 - \epsilon_s$ ; радиус основания  $a_c$ ; радиус:

$$R = \frac{a_c^2}{2\omega R_{\max}}, \quad (14)$$

где  $R \gg R_{\max}$ .

При упругом контакте зависимость между относительной величиной внедрения  $i$ -ой неровности  $h_i/R$  и относительным усилием описывается выражением [3]:

$$\frac{P_{ei}}{E^* R^2} = \frac{4}{3} \left( \frac{h_i}{R} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (15)$$

где  $E^*$  – контактный модуль упругости.

Для упругопластического контакта в работах [3, 8] использована методика определения  $h/R$  на основе подобия деформационных характеристик, однако ее применение для распределенных по высоте сферических сегментов затруднительно, так как зависимость  $P-h$  в явном виде не описывается. Поэтому используем выражение из работы [16], расчеты по которому с погрешностью менее 5 % согласуются с результатами [3] для  $0 \leq h/R \leq 0,15$ .

$$\frac{P_{epi}}{E^* R^2} = e^{-B} \left( \frac{h_i}{R} \right)^A, \quad (16)$$

где  $A = A(\epsilon_y, n)$ ,  $B = B(\epsilon_y, n)$ ;  $\epsilon_y = \sigma_y / E^*$ .

При использовании выражения (16) для неровностей шероховатой поверхности следует учитывать, что:

$$h_i = (\varepsilon - u)R_{\max}, \quad (17)$$

$$\frac{h_i}{R} = \frac{(\varepsilon - u) \cdot 2\omega R_{\max}^2}{a_c^2} = \left( \frac{\varepsilon - u}{2\omega} \right) \cdot \left( \frac{2\omega R_{\max}}{a_c} \right)^2, \quad (18)$$

где  $\varepsilon$  – относительное сближение шероховатой поверхности и полупространства;  $u$  – исходное расстояние от уровня вершин до вершины  $i$ -ой неровности.

При внедрении жесткой шероховатой поверхности на величину  $\varepsilon$  общее усилие  $P$  определяется выражением:

$$P = \int_{\varepsilon - \varepsilon_e}^{\varepsilon} P_{ei} dn_r + \int_0^{\varepsilon - \varepsilon_e} P_{epi} dn_r, \quad (19)$$

где  $\varepsilon_e$  – относительная граница упругого контакта;  $dn_r$  – число вершин в слое  $du$ ,

$$dn_r = n_c \Phi'_n(u) du, \quad n_c = \frac{A_c}{\pi a_c^2}. \quad (20)$$

По данным [3, 4, 8] и с учетом выражения (14):

$$\varepsilon_e = \frac{\pi^2 K_y^2 \varepsilon_y^2 a_c^2}{8\omega R_{\max}^2}, \quad (21)$$

где  $K_y = 1,613$  – коэффициент, учитывающий начало пластической деформации внутри полупространства под вершиной неровности.

Рассмотрим случай, когда  $\varepsilon_e \rightarrow 0$ .

Подставляя выражение (20) в (19), имеем:

$$\frac{P}{A_c} = q_c = \int_0^{\varepsilon} q_{cepi} \cdot \Phi'_n(u) du, \quad (22)$$

где  $q_{cepi} = \frac{P_{epi}}{\pi a_c^2}$ .

Обозначая:

$$\frac{q_c a_c}{\omega R_{\max} E^*} = F_q, \quad (23)$$

с учетом (15), (16), (18) окончательно получим:

$$F_q(\varepsilon) = \frac{2^{2(A-1)} e^{-B}}{\pi} \left( \frac{\omega R_{\max}}{a_c} \right)^{2A-3} \cdot \int_0^{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon - u}{2\omega} \right)^A \Phi'_n(u) du. \quad (24)$$

Для фактической площади контакта аналогично выражению (19) имеем:

$$A_r = \int_0^{\varepsilon} A_{repi} dn_r. \quad (25)$$

При определении  $A_{repi}$  учитываем, что:

$$h_{ci} = c_i^2 \cdot h_i. \quad (26)$$

По данным [17]:

$$c_i^2 = \frac{h_{ci}}{h_i} = M^{\frac{2}{N}} \left( 2 \frac{h_i}{R} \right)^{\frac{2}{N}-1}, \quad (27)$$

где  $M = M(\varepsilon_y, n)$ ,  $N = N(\varepsilon_y, n)$ .

Для относительной площади контакта  $\eta = A_r/A_c$  окончательно получим:

$$\eta(\varepsilon) = (2M)^{\frac{2}{N}} \left( \frac{2\omega R_{\max}}{a_c} \right)^{2\left(\frac{2}{N}-1\right)} \times \int_0^{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon - u}{2\omega} \right)^{\frac{2}{N}} \Phi'_n(u) du. \quad (28)$$

Рассмотрим процесс разгрузки для отдельной сферической микронеровности. В соответствие с выражением (4) имеем:

$$P_{ei} = P_{epi} \left( \frac{h_{ei} - h_{fi}}{h_i - h_{fi}} \right)^{m_i}, \quad (29)$$

где

$$m_i = \frac{3 - 2(2M)^{\frac{2}{N}} \frac{h_i}{R}}{2 - (2M)^{\frac{2}{N}} \frac{h_i}{R}}. \quad (30)$$

Для приближенных расчетов можно принять  $m_i \approx 1,5$ .

Учитывая, что:

$$h_i - h_{fi} = w_{0i}, \quad (31)$$

выражение (29) можно представить в виде:

$$P_{ei} = P_{epi} \left( \frac{h_i - \Delta h - h_{fi}}{h_i - h_{fi}} \right)^m = P_{epi} \left( \frac{w_{0i} - \Delta h}{w_{0i}} \right)^m. \quad (32)$$

Аналогично уравнению (18) для  $\Delta h/R$  имеем:

$$\frac{\Delta h}{R} = \frac{\Delta \varepsilon}{2\omega} \left( \frac{2\omega R_{\max}}{a_c} \right)^2. \quad (33)$$

Следует отметить, что при разгрузке жесткой шероховатой поверхности величина  $\Delta h$  для всех неровностей одинакова.

При определении  $w_{0i}$  используем данные [3]:

$$\frac{w_{0i}}{R} = \frac{w_{0i}}{R} = \frac{e^B h^{-A} K_{\alpha 0}}{\pi (2M)^{\frac{1}{N}}}, \quad (34)$$

где  $K_{\alpha 0} = 2^{2\alpha-1} \alpha B(\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha = A(\varepsilon_y, n)$ .

С учетом (18):

$$\frac{w_{0i}}{R} = \frac{K_{\alpha 0} e^{-B}}{\pi (2M)^{\frac{1}{N}}} \left( \frac{\varepsilon - u}{2\omega} \right)^{A-\frac{1}{N}} \left( \frac{2\omega R_{\max}}{a_c} \right)^{2\left(A-\frac{1}{N}\right)}. \quad (35)$$

Тогда для процесса разгрузки аналогично выражению (24) получим:

$$F_{qe}(\epsilon_y, n, \xi, \Delta_\epsilon) = \frac{2^{2(\alpha-1)} e^{-B} \left( \frac{\omega R_{\max}}{a_c} \right)^{2A-3}}{\pi} \times \int_0^\xi \left( \frac{\xi-u}{2\omega} \right) H(\epsilon_y, n, \xi, u, \Delta_\epsilon)^m \phi'_n(u) du \quad (36)$$

где:

$$H(\epsilon_y, n, \xi, u, \Delta_\epsilon) = \begin{cases} \frac{w_{0i}(\epsilon_y, n, \xi, u) - \Delta_\epsilon}{w_{0i}(\epsilon_y, n, \xi, u)}, & w_0 > \Delta_\epsilon \\ 0, & w_0 \leq \Delta_\epsilon \end{cases} \quad (37)$$

Используя выражения (9) и (10), аналогично (28) получим:

$$\eta_e(\epsilon_y, n, \xi, \Delta_\epsilon) = (2M)^{\frac{2}{N}} \left( \frac{2\omega R_{\max}}{a} \right)^{2\left(\frac{2}{N}-1\right)} \times \int_0^\xi \left( \frac{\xi-u}{2\omega} \right)^{\frac{2}{N}} H(\epsilon_y, n, \xi, u, \Delta_\epsilon) \phi'_n(u) du \quad (38)$$

где  $H(\epsilon_y, n, \xi, u, \Delta_\epsilon)$  определяется выражением (37).

Следует отметить, что:

$$(\Delta_\epsilon)_{\max} = \frac{w_{0i}(\epsilon_y, n, \xi, 0)}{2\omega} \left( \frac{a_c}{R_{\max}} \right)^2 \quad (39)$$

На рис. 3 представлены зависимости нагружения  $F_q(\epsilon)$  и разгрузки  $F_{qe}(\xi - \Delta_\epsilon)$  жесткой шероховатой поверхности при контактировании с упругопластическим полупространством для разных значений  $\epsilon_y$  и  $n$ , рассчитанные по выражениям (36) и (38).

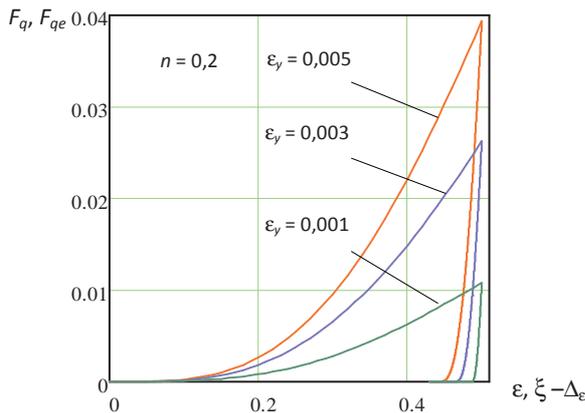


Рис. 3. Диаграмма нагружения и разгрузки шероховатой поверхности с упругопластическим полупространством

На рис. 4 представлены зависимости относительной площади контакта  $F_q(\epsilon)$   $\eta$  и  $\eta_e$  от силового упругопластического параметра  $F_q$  и  $F_{qe}$  при нагружении и разгрузке соответственно.

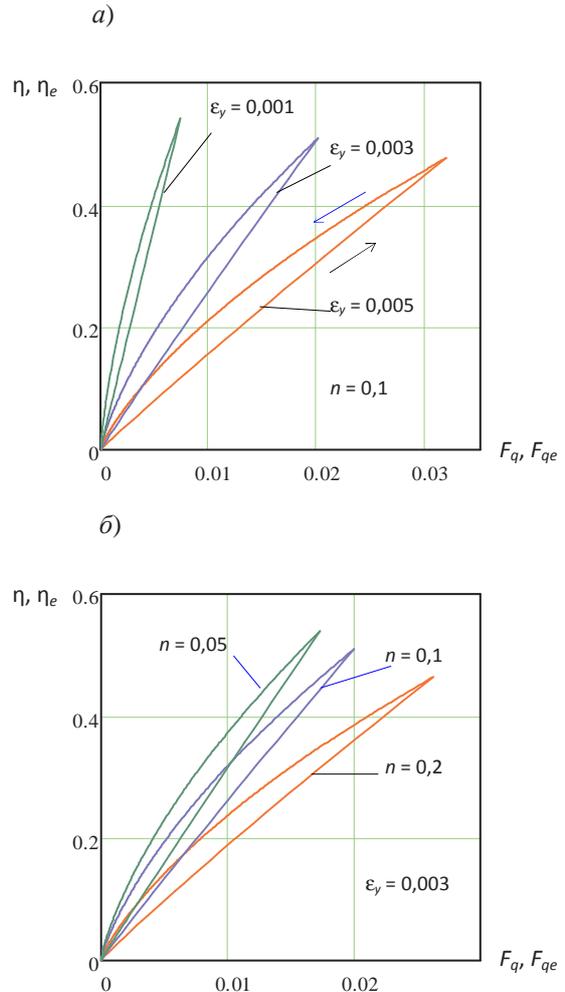


Рис. 4. Зависимости относительной площади контакта от силового упругогеометрического параметра при нагружении  $\eta(F_q)$  и разгрузке  $\eta_e(F_{qe})$  для разных значений  $\epsilon_y$  и  $n$

**Заключение**

1. Впервые, по мнению авторов, получены зависимости, позволяющие прогнозировать изменение относительной площади контакта при уменьшении нагрузки, приложенной к стыку шероховатых поверхностей.

2. При этом показана роль параметров упрочняемости материала  $\epsilon_y$  и  $n$ . С ростом упругих свойств материала (увеличением значений  $\epsilon_y$  и  $n$ ) ширина петли на рис. 4 увеличивается.

3. При определении параметра  $c^2$  использовались результаты работы [17], полученные для значения коэффициента трения  $\mu = 0$ . В настоящей работе влияние трения на характеристики контакта не исследовалось. При внедрении сферы этот вопрос исследован в работах [18, 19]. В дальнейших исследованиях характеристик контакта шероховатой поверхности этот вопрос будет рассмотрен.

*Литература*

1. Огар П.М., Горохов Д.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей: фрактальный подход. Братск: БрГУ, 2007, 171 с.  
 2. Ланков А.А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверх-

ностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3-5.

3. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1. С. 80-87.

4. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Описание взаимодействия жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2012. Т. 1. С. 163-169.

5. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Контактное взаимодействие жесткой шероховатой поверхности через слой упругопластического покрытия // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 3. С. 42-45.

6. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. К вопросу использования диаграммы кинетического индентирования сферой для описания упругопластического контакта // Труды Братского государственного университета. Сер. Естественные и инженерные науки. 2013. Т. 1. С. 164-167.

7. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 664. P. 625-631.

8. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Трибомеханика упругопластического контакта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2. С. 116-122.

9. Огар П.М., Корсак И.И. Влияние характеристик тяжело нагруженного стыка шероховатых поверхностей на герметичность. Братск: БрИИБ, 1989. 110 с. Деп. в ВИНТИ, № 6 109-В90.

10. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Герметизирующая способность тяжело нагруженных уплотнительных стыков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3 (23). С. 136-142.

11. Огар П.М., Горохов Д.Б., Ключев Е.А. Герметизирующая способность стыка фрактальных шероховатых поверхностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 2 (14). С. 63-65.

12. Белокобыльский С.В., Огар П.М., Тарасов В.А. Многокритериальный подход к проектированию затворов трубопроводной арматуры // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 3 (15). С. 6-10.

13. Огар П.М., Тарасов В.А., Корсак И.И. Оптимальное проектирование затворов трубопроводной арматуры. Братск: БрГУ, 2012. 145 с.

14. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытания материалов непрерывным вдавливанием индентора. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.

15. Ковалев А.П. Основные закономерности вдавливания сферического индентора и оценка физико-механических свойств поверхностного слоя деталей // Упрочняющие технологии и покрытия. 2007. № 1. С. 36-41.

16. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Design. 2010. Vol. 31. P. 636 – 640.

17. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

18. Guo W.C., Rauchs G., Zhang W.H., Ponthot J.P. Influence of friction in material characterization in microindentation measurement // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234. P.2183-2192.

19. Огар П.М., Тарасов В.А., Горохов Д.Б. Учет трения при упругопластическом внедрении сферической неровно-

сти // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 2 (42). С. 37-44.

#### Reference

1. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Rough surfaces touchdown: fractal approach. Bratsk: BrGU. 2007. 171 p.

2. Lankov A.A. Probability of elastic and plastic deformations while compressing metal rough surfaces // Treniye i smazka v mashinakh i mekhanizmakh. 2009. №3. P. 3-5.

3. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Elaboration of engineering calculation for contact characteristics of a rigid sphere and elastoplastic half-space // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2012. № 1(33). P. 80-87.

4. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Description of the contact of a rigid sphere and elastoplastic half-space // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2012. T. 1. P. 163-169.

5. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Rough rigid surface contacting through the elastoplastic coating layer // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2012. № 3. P. 42-45.

6. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. On the question of the use of the sphere kinetic indentation diagram to describe the elastic-plastic contact // Trudy Bratskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennye i inzhenernye nauki. 2013. T. 1. P. 164-167.

7. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic indentation application to determine contact characteristics of sphere and elastoplastic half-space // Advanced Materials Research. Vol. 664 (2013). P. 625-631.

8. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Tribomechanics of elastoplastic contact // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2013. № 2. P. 116-122.

9. Ogar P.M., Korsak I.I. The influence of the heavy-laden interface of rough surfaces characteristics on leaktightness. Bratsk: BrGU, 1989. 110 s. Dep. v VINITI, № 6109-B90.

10. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Sealing ability of heavy loaded sealing joints // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2009. № 3. P. 136-142.

11. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Klyuchev E.A. Sealing ability of the fractal rough surfaces joint // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2007. № 14. P. 63-65.

12. Belokobylsky S.V., Ogar P.M., Tarasov V.A. Multicriterion approach to the pipeline valves designing // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2007. № 15. P. 6-10.

13. Ogar P.M., Tarasov V.A., Korsak I.I. Optimum design of pipeline valve seals. Bratsk: Izd-vo BrGU, 2012. 145 p.

14. Bulychev S.I., Alekhin V.P. Testing of materials by continuous depression of an indenter. M.: Mashinostroenie, 1990. 224 s.

15. Kovalev A.P. Basic laws of the indentation of a spherical indenter and evaluation of physical and mechanical properties of the surface layer of machine elements // Uprochnyayushchiye tekhnologii i pokrytiya. 2007. № 1. P. 36-41.

16. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // Materials and Design. 2010. V. 31. P. 636 – 640.

17. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. № 43. P. 4136-4153.

18. Guo W.C., Rauchs G., Zhang W.H., Ponthot J.P. Influence of friction in material characterization in microindentation measurement // Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 234. (2010), P. 2183-2192.

19. Ogar P.M., Tarasov V.A., Gorokhov D.B. Accounting friction for elastoplastic indentation by spherical asperity // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2014. № 2 (42). P. 37-44.